# ÜBER
# DIE SCHWINGUNGEN GESPANNTER SAITEN.

Von

Prof. J. PETZVAL,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 18. MÄRZ 1858.

Es sei $AB$ ein biegsamer und elastischer Faden und $\mu$ bezeichne die Masse, die ein Stück desselben von der Länge Eins besitzt. Da $\mu$ nicht nothwendig constant vorausgesetzt wird, mithin die Rede ist von einem Faden, der auch ungleich dick sein kann; so betrachten wir $\mu$ als eine Function der Coordinate $x$. Ebenso mag $S$ die Spannung bedeuten, welcher der Faden unterworfen ist im Punkte, dem die Coordinate $x$ angehört. $X$, $Y$, $Z$ seien die Componenten der beschleunigenden Kräfte, die, bezogen auf die Einheit der Masse, auf die einzelnen Punkte des linearen Systemes wirken. Man zerlege dieses, wie üblich, in unendlich kleine Elemente von der Länge $ds$; so ist $\mu ds$ die Masse eines solchen und

$$\mu X ds \quad , \quad \mu Y ds \quad , \quad \mu Z ds \tag{1}$$

sind die drei Componenten der auf dieses Element wirkenden beschleunigenden Kräfte. Von den Coordinaten $x$, $y$, $z$, die dem Punkte $m$ angehören, betrachten wir nur die erste $x$ als aller möglichen Werthe fähig, die beiden anderen hingegen, $y$ und $z$ nämlich, immer als entsprechend klein, d. h. der Faden soll im Zustande des Gleichgewichtes sowohl, wie auch im Zustande der Bewegung von einer geraden Linie wenig abweichen. Die Spannung $S$ im Punkte $m$ zerlegen wir in drei Componenten. Diese sind:

$$-S\frac{dx}{ds} \quad , \quad -S\frac{dy}{ds} \quad , \quad -S\frac{dz}{ds}. \tag{2}$$

Beim Übergange nun vom Anfangspunkte $m$ des Elementes $\mu ds$ zum Endpunkte desselben wächst $x$ um $dx$, $s$ um $ds$ und mit einem Worte alle auf das System bezüglichen Variablen um ihre Differentiale, also auch die Spannung $S$, die dort in $S + dS$ übergegangen ist, und die eine Kraft vorstellt, deren Componenten jenen in $m$ der Richtung nach entgegengesetzt sind. Diese Componenten sind also:

$$(3)\qquad S\frac{dx}{ds}+d\Big(S\frac{dx}{ds}\Big)\quad,\quad S\frac{dy}{ds}+d\Big(S\frac{dy}{ds}\Big)\quad,\quad S\frac{dz}{ds}+d\Big(S\frac{dz}{ds}\Big)$$

und diese Kräfte sind es, die am Elemente $\mu ds$ sich das Gleichgewicht halten sollen, wenn es sich nämlich um Angabe der Position des Gleichgewichtes handelt. Sie werden es thun, wenn die drei Summen der unter (1), (2), (3) aufgezeichneten Componenten längs jeder der drei Coordinatenaxen für sich Null sind, d. h.:

$$(4)\quad \mu X ds+\frac{d}{dx}\Big(S\frac{dx}{ds}\Big)dx=0\quad,\quad \mu Y ds+\frac{d}{dx}\Big(S\frac{dy}{ds}\Big)dx=0\quad,\quad \mu Z ds+\frac{d}{dx}\Big(S\frac{dz}{ds}\Big)dx=0.$$

Diese sind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes, die integrirt die Kettenlinie geben, d. h. die Form jener Curve, welche der Faden unter der Einwirkung dieser Kräfte im Gleichgewichtszustande annehmen wird. Wird dieses Gleichgewicht irgendwie gestört, z. B. dadurch, dass man den Faden ganz oder theilweise gewaltsam aus seiner Ruhelage bringt und ihn dann wieder denselben Kräften überlässt, so entstehen Schwingungen von sehr kleinen Amplituden und man kann annehmen, dass am Ende der Zeit $t$ die Coordinaten des Punktes $m$, die in der Gleichgewichtslage $x$, $y$, $z$ gewesen wären, übergegangen seien in $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, unter $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sehr kleine Verschiebungen verstanden, in Folge deren der Faden zwar hier und da eine theilweise Verlängerung oder Verkürzung erfahren kann, die wir aber so gering annehmen wollen, dass dadurch $\mu$ keine wesentliche Veränderung erleidet, während gleichwohl die Spannung $S$ dadurch übergeht in $S'=S+T$, allwo $T$ ein namhafter Zusatz zu $S$ sein kann, den man der Verlängerung des Elementes $\mu ds$ proportional anzunehmen gewohnt ist, weil die Erfahrung vorliegt, dass so lange die Grenze der natürlichen Elasticität nicht überschritten wird, die Verlängerungen elastischer Körper den Spannungen proportional seien. Da solchergestalt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ kleine längs den drei Coordinatenaxen durchlaufene Räume darstellen, so sind die folgenden drei Producte aus der Masse $\mu ds$ des bewegten Theilchens in die zweiten Differentialquotienten dieser Räume nach der Zeit $t$ genommen, nämlich:

$$(5)\qquad \mu ds\frac{d^2\xi}{dt^2}\quad,\quad \mu ds\frac{d^2\eta}{dt^2}\quad,\quad \mu ds\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

die drei Componenten derjenigen Kraft, welche die wirkliche Bewegung des Theilchens $\mu ds$ zu erzeugen vermag, wenn dasselbe von dem übrigen Systeme getrennt vorausgesetzt wird. Diese Kräfte nun, in entgegengesetzter Richtung zu den anderen hinzugesetzt, müssen offenbar das Gleichgewicht wieder herbeiführen, man hat mithin die folgenden drei Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mu ds\frac{d^2\xi}{dt^2}&=\mu X ds+\frac{d}{dx}\Big(S'\frac{d(x+\xi)}{d(s+\sigma)}\Big)dx\\ \mu ds\frac{d^2\eta}{dt^2}&=\mu Y ds+\frac{d}{dx}\Big(S'\frac{d(y+\eta)}{d(s+\sigma)}\Big)dx\\ \mu ds\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\mu Z ds+\frac{d}{dx}\Big(S'\frac{d(z+\zeta)}{d(s+\sigma)}\Big)dx. \end{aligned}$$

Hier müssen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und $S'=S+T$ als Functionen zweier Veränderlichen $x$ und $t$ angesehen werden, während $y$, $z$, $\mu$, und auch $X$, $Y$, $Z$ reine Functionen von $x$ ohne $t$ andeuten, diejenigen nämlich, welche sich auf die Gleichgewichtslage des Systemes beziehen und das System der Gleichungen (4) identisch erfüllen. Wenn im Bewegungszustande der Bogen $s$ der Curve, gezählt von irgend einem Punkte, zum Beispiele einem festen des Systemes, übergeht in

$s+\sigma$, so geht die Länge des Elementes $ds$ über in $ds+d\sigma=ds\left(1+\frac{d\sigma}{ds}\right)$. Nennen wir jetzt $Q$ die Spannung, welche ein Stück gleich Eins des Fadens eben um die Einheit zu verlängern vermöchte, d. h. die Länge verdoppeln könnte, falls die natürliche Elasticität so weit reichte, so verhält sich $T$ zu $Q$, wie die Verlängerung $\frac{d\sigma}{ds}$ zur Verlängerung Eins. Es ist also:

$$T=Q\frac{d\sigma}{ds}. \tag{7}$$

Hier kann $\sigma$ nur betrachtet werden als eine Function von $t$. $Q$ hingegen bedeutet eine Spannung von in der Regel gegen $S$ sehr grossem Werthe, die bei einem allenthalben gleich dicken Faden constant ist, bei einem ungleichförmigen hingegen abhängig von $\mu$, und zwar kann man:

$$Q=q\mu \tag{8}$$

annehmen, unter $q$ eine reine Constante verstanden. Hiermit gehen aber die Differentialgleichungen der Bewegung über in:

$$\begin{aligned}
\mu\, ds\frac{d^2\xi}{dt^2}&=\mu X ds+\frac{d}{dx}\left[\left(S+q\mu\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d(x+\xi)}{d(s+\sigma)}\right]dx\\
\mu\, ds\frac{d^2\eta}{dt^2}&=\mu Y ds+\frac{d}{dx}\left[\left(S+q\mu\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d(y+\eta)}{d(s+\sigma)}\right]dx\\
\mu\, ds\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\mu Z ds+\frac{d}{dx}\left[\left(S+q\mu\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d(z+\zeta)}{d(s+\sigma)}\right]dx.
\end{aligned} \tag{9}$$

Man kann im Allgemeinen zu ihrer Integration nicht schreiten, bevor man die Gleichgewichtsgleichungen erledigt hat. Diese geben vorerst $y$ und $z$ als Function von $x$, die dann, eingeführt in die Bewegungsgleichungen, denselben die zum Integriren geeignete Form verleihen.

Setzen wir $X=Y=Z=0$, so ist augenscheinlich den Gleichungen (4) Genüge geleistet, was auch $\mu$ bedeuten mag, wenn man $x=s$, $y=z=0$ annimmt und zugleich $S$ eine Constante sein lässt. Dies wäre der Fall eines biegsamen und elastischen Fadens ohne Gewicht, der in der Natur zwar nirgends vorkömmt, der aber doch als der allereinfachste den Untersuchungen über gespannte Saiten zu Grunde gelegt werden muss, um vor allem anderen den Einfluss kennen zu lernen der constanten Spannung $S$ in einem geradlinigen Systeme auf die Gesetze der schwingenden Bewegung. Hat man solchergestalt die Wirkungen einer einzigen Hauptursache erschöpfend kennen gelernt, so geht man über zur Erforschung der Wirkungen der übrigen Umstände, unter deren Einfluss das System steht. Die Bewegungsgleichungen verwandeln sich für ein solches geradlinig längs der Axe der $x$ ausgedehntes System mit allerwärts gleicher Spannung $S$ in die folgenden einfacheren:

$$\begin{aligned}
\mu\frac{d^2\xi}{dt^2}&=q\left[\mu\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d\mu}{dx}\frac{d\xi}{dx}\right]\\
\mu\frac{d^2\eta}{dt^2}&=S\frac{d^2\eta}{dx^2}\\
\mu\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=S\frac{d^2\zeta}{dx^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Der Zusatz $\sigma$ zu $s$ ist hier herausgefallen, weil man $x=s$ hat; weil aber $x$ in $x+\xi$ und $s$ in $s+\sigma$ übergehen soll und da ganz allgemein die Gleichung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{11}$$

zu bestehen hat, auch wenn man $x$, $y$, $z$, $s$ verwandelt in $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, $s + \sigma$, so ergibt sich auch:

$$d(s + \sigma) = \sqrt{(dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2 + (dz + d\zeta)^2} \tag{12}$$

und in Erwägung, dass $dy = 0$, $dz = 0$, $dx = ds$ bestehen, dass ferner $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ als sehr kleine Grössen der zweiten Ordnung zu betrachten sind wegen der Kleinheit von $\xi, \eta, \zeta$ zu jeder Zeit $t$:

$$d\sigma = d\xi, \tag{13}$$

wodurch die Ableitung der (10) aus den (9) vollkommen gerechtfertigt ist.

Für constante $\mu$ hat man diese Geichungen (10) bereits integrirt; den Fall aber von veränderlichen $\mu$ allgemein zu erledigen, reichten die bisherigen Methoden nicht hin. In dieser letzteren Beziehung verdienen daher diese Differentialgleichungen annoch eine sorgfältigere Discussion, aus der die gründlichere Beantwortung der Frage hervorgehen soll: Welchen Einfluss nimmt die wechselnde Dicke einer Saite auf die Schwingungen derselben?

Ein zweiter Fall, beinahe eben so einfach als der hier angeführte, ist der einer schweren und vertical hängenden Kette. Denkt man sich die Coordinatenaxe der $x$ hier gleichfalls vertical, so hat man:

$$X = -2g \quad , \quad Y = Z = 0. \tag{14}$$

Die Position des Gleichgewichtes ist wieder eine gerade Linie, weil man sich sehr leicht überzeugt, dass:

$$y = z = 0 \quad , \quad s = x$$

die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes (4) erfüllen, wenn

$$dS = 2\mu g dx \tag{15}$$

angenommen wird. Dies gibt für constante $\mu$:

$$S = 2\mu g x + C. \tag{16}$$

Zur Bestimmung von $C$ bemerke man, dass am freien Ende einer solchen Kette, wenn überhaupt ein freies Ende vorhanden ist, nothwendig $S = 0$ sein muss. Verlegen wir dorthin den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist an derselben Stelle auch $x = 0$, mithin $C = 0$. Gibt es kein freies Ende, so bedeutet $C$ offenbar die Spannung in demjenigen Punkte, wo man $x = 0$ hat, somit im Anfangspunkte der Coordinaten. Substituiren wir jetzt die hier angenommenen Werthe von $X$, $Y$, $Z$ und $s$ unter steter Voraussetzung eines constanten $\mu$ in die Bewegungsgleichungen, so erhalten wir:

$$\tag{17} \begin{aligned} \mu \frac{d^2\xi}{dt^2} &= q\,\mu \frac{d^2\xi}{dx^2} \\ \mu \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 2\mu g \frac{d\eta}{dx} + (2\mu g x + C) \frac{d^2\eta}{dx^2} \\ \mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 2\mu g \frac{d\zeta}{dx} + (2\mu g x + C) \frac{d^2\zeta}{dx^2}. \end{aligned}$$

Endlich wollen wir noch beispielsweise annehmen, der Faden verbinde zwei Punkte, die nicht in einer und derselben Verticalen liegen, und werde gezwungen eine krumme Linie zu beschreiben. Wir wählen abermals die Coordinatenaxe der $x$ vertical und legen jene der $y$ und $z$ in eine Horizontalebene; zugleich soll die Saite zwei Punkte mit der Axe der $y$ gemeinschaftlich haben und sich von derselben in allen Punkten nur wenig entfernen. Man kann dann $z = 0$ voraussetzen, weil keine Ursache vorhanden ist, dass der Faden aus der Coordinatenebene der $xy$ heraustrete. Die drei Gleichgewichtsgleichungen verwandeln sich unter diesen Voraussetzungen in folgende zwei:

$$-2g\mu ds + \frac{d}{dx}\left(S\frac{dx}{ds}\right)dx = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(S\frac{dy}{ds}\right) = 0. \tag{18}$$

Von diesen beiden Gleichungen gibt die zweite integrirt:

$$S\frac{dy}{ds} = C. \tag{19}$$

Hier ist $C$ eine Integrationsconstante, die offenbar die Spannung im tiefsten Punkte der Curve bedeutet, in welchem $dy = ds$ ist. Eliminiren wir nun mit Hilfe der letztgewonnenen Gleichung $S$ aus der ersten der beiden (18), so entsteht zunächst:

$$-2g\mu ds + d\left(C\frac{dx}{dy}\right) = 0. \tag{20}$$

Im Falle die Curve eine sehr flachgespannte ist, so hat man immer nahezu $ds = dy$ und wenn der Bogen vom tiefsten Punkte gezählt wird, auch $s = y$. Diesen Fall hier vorausgesetzt, erhält man durch Integration der vorliegenden Gleichung:

$$C\frac{dx}{dy} = 2g\mu y. \tag{21}$$

Eine Constante braucht man nicht hinzuzufügen, wenn man annimmt, dass die $y$ vom tiefsten Punkte gezählt werden. Durch abermaliges Integriren ergibt sich:

$$y^2 = \frac{C}{g\mu}x. \tag{22}$$

Dies ist offenbar die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $\frac{C}{g\mu}$ ist. Diese krumme Linie bezeichnet daher die Position des Gleichgewichtes. Und führen wir jetzt $S = C$, ferner den aus der Gleichung der Parabel hervorgehenden Werth von $dx$ in die zwei ersten der Gleichungen (9) ein, die dritte desshalb ausser Acht lassend, weil $z + \zeta = 0$ vorausgesetzt werden kann, so erhalten wir, Rücksicht nehmend auf den Werth von $d\sigma$, der aus der (12) abgeleitet der folgende ist:

$$d\sigma = \frac{2g\mu y}{C}d\xi + d\eta \tag{23}$$

und zugleich die $y$ als Grundvariable auffassend, die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu\frac{d^2\xi}{dt^2} &= C\frac{d^2\xi}{dy^2} + 2\mu g\left(\frac{g\mu}{C} - 1\right)\frac{d}{dy}\left\{2x\frac{d\xi}{dy} + y\frac{d\eta}{dy}\right\} \\ \mu\frac{d^2\eta}{dt^2} &= g\mu\frac{d^2\eta}{dy^2} + 2\mu g\left(\frac{g\mu}{C} - 1\right)\frac{d}{dy}\left\{y\frac{d\xi}{dy}\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

die die Gesetze der Schwingungen sehr flach und beinahe geradlinig gespannter Saiten in sich enthalten. Da nun die Theorie der Schwingungen gespannter Saiten bisher nur in dem rein hypothetischen Falle allenthalben gleicher Dicke und Spannung, mithin der gänzlichen Abwesenheit beschleunigender Kräfte erledigt worden, der in der Natur nirgends anzutreffen ist; so scheint die Integration der hier angeführten Differentialgleichungen mit variablen Coëfficienten, als diese Schwingungstheorie vervollständigend, einige Aufmerksamkeit zu verdienen, die ihr nunmehr um desto leichter geschenkt werden mag, da die neuere Analysis zu diesem Zwecke zureichende Mittel besitzt.

Wir wollen jetzt den bisher noch nie in Betracht gezogenen Fall ins Auge fassen, wo die Dicke des Fadens sich an einem bestimmten Punkte, dem Anfangspunkte der Coordinaten z. B. wo $x = 0$ besteht, urplötzlich ändert, so dass alldort zwei verschiedene Fäden mit ihren Enden verbunden erscheinen, die Masse der Längeneinheit des auf der negativen Seite der Coordinaten bis zum Anfangspunkte sich erstreckenden Fadens, den man für den schwächeren gelten lassen kann, sei $m$; die Masse hingegen der Längeneinheit des stärkeren Fadens, der sich auf der Seite der positiven $x$ befindet und dort eine unbestimmte Längenausdehnung besitzt, sei $M$; so ist die in unseren Rechnungen mit $\mu$ bezeichnete Grösse wohl auch variabel, aber nicht in der stetigen Weise, in der es die meisten in der Analysis gebräuchlichen Functionen sind, und es vermag ein solches bei $x = 0$ plötzlich vom Werthe $m$ bis $M$ überspringendes $\mu$ nur wiedergegeben zu werden durch Functionsformen, deren Gebrauch ein seltenerer ist, z. B. bestimmte Integrale oder Exponentiellen der zweiten Classe wie $0^{0^x}$. Wir ziehen hier die Letzteren vor und betrachten sie, um damit rechnen zu können, als Grenzwerthe von Ausdrücken wie $\varepsilon^{\delta^x}$, unter gleichzeitigem Abnehmen von $\delta$ und $\varepsilon$ gewonnen. Eine solche Function von $x$ wollen wir im Folgenden mit $\chi$ bezeichnen. Ist noch dazu $\log \delta = -\gamma$ und $\log \varepsilon = -\beta$; so lässt sich $\chi$ auch aufschreiben, wie folgt:

$$\chi = \varepsilon^{\delta^x} = e^{-\beta e^{-\gamma x}} \tag{25}$$

und man hat sich unter $\beta$ und $\gamma$ ins Unendliche wachsende Grössen zu denken, wenn man $\delta$ und $\varepsilon$ gegen die Nulle convergiren lässt. Statuirt man endlich der Bequemlichkeit wegen noch:

$$e^{-\gamma x} = \tau \quad ; \quad \text{so wird } \chi = e^{-\beta\tau}.$$

Man überzeugt sich nun ohne sonderliche Mühe, dass die folgenden drei Systeme von Werthen von $x$, $\tau$ und $\chi$ schematisch zusammenbestehen, wenn $\delta$ und $\varepsilon$ unendlich klein, oder, was dasselbe ist, wenn $\beta$ und $\gamma$ unendlich gross geworden sind:

$$\begin{array}{lll} x < 0 & x = 0 & x > 0 \\ \tau = \infty & \tau = 1 & \tau = 0 \\ \chi = 0 & \chi = 0 & \chi = 1. \end{array}$$

Hieraus folgt, dass wenn man sich $\mu$ allgemein für jedes $x$ gegeben denkt, durch die folgende Formel:

$$\mu = m + \chi^2 (M - m) \tag{26}$$

in den aufgezählten drei Fällen demselben die folgenden drei Werthe zukommen werden:

$$\mu = m \quad , \quad \mu = m \quad , \quad \mu = M.$$

Dies ist also im analytischen Ausdrucke der Faden, wie wir ihn gerade wünschen, und wenn wir uns $\beta$ und $\gamma$ nicht absolut unendlich, sondern nur als sehr bedeutende Zahlenwerthe denken, so können wir daraus anstatt eines unstetigen Überspringens die mannigfaltigsten stetigen Übergänge der Fadenstärke $m$ in die andere $M$ in der Nähe des Coordinatenanfangspunktes und in einem mehr oder minder ausgedehnten Intervalle durch die Function $\chi$ bewerkstelligt denken, und dies ist es, was die Exponentialgrösse der zweiten Ordnung besonders zu empfehlen scheint, um Übergänge von einem schwingenden Mittel in das andere, die in der Nähe eines Trennungspunktes oder einer Trennungsfläche in einer vielleicht unmessbaren Entfernung von derselben stattfinden, analytisch wiederzugeben. Es ist aber zu diesem Zwecke nothwendig, dass man die Function $\chi$ etwas näher kennen lerne, um von derselben mindestens für beträchtlich grosse $\beta$ und $\gamma$ ein geometrisches Bild vor Augen zu haben. Dies wollen wir unter der Voraussetzung thun, dass $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\gamma}$ mit einander vergleichbare kleine Grössen von der ersten Ordnung seien, jedoch von der Nulle verschieden. Man hat dann in der Folge noch immer das Recht, sie dem wirklichen Verschwinden nach Belieben zu nähern. Die Gleichung:

$$\chi = e^{-\beta\tau} = e^{-\beta e^{-\gamma x}}$$

gehört unter solchen Voraussetzungen zu einer stetigen krummen Linie, die auf der negativen Seite der Coordinaten $x$ mit der Axe derselben zusammenfällt, auf der positiven Seite aber in eine zur Axe parallele Gerade übergeht, geführt im Abstande gleich Eins. Die Verbindung dieser beiden Geraden findet Statt in der Nähe des Anfangspunktes durch ein aufsteigendes Curvenstück, dessen Gestalt zu kennen wünschenswerth ist. Wir legen zu diesem Zwecke zu demselben in einem Punkte, dem irgend ein $x$ angehört, eine Tangente. Sie wird die Abscissenaxe schneiden unter einem Winkel, dessen trigonometrische Tangente, wie man weiss, $\frac{d\chi}{dx}$ ist. Man hat aber:

$$\chi' = \frac{d\chi}{dx} = \beta\gamma\chi\tau. \tag{27}$$

Da wir ferner wissen, dass dieser Winkel von einem Werthe Null, den er auf der Seite der negativen $x$ hat, wieder zu einem Werthe Null auf der Seite der positiven $x$ zurückkehrt, so steht zu vermuthen, dass derselbe irgendwo ein Maximum oder Minimum haben werde, d. h. wir schliessen auf einen Wendepunkt der Curve, für welchen:

$$\chi'' = \frac{d^2\chi}{dx^2} = \beta\gamma^2\chi\tau\,[\beta\tau - 1] = 0 \tag{28}$$

besteht. Dies gibt aber:

$$\tau = \frac{1}{\beta} \qquad \text{mithin} \qquad x = \frac{\log\beta}{\gamma}$$

und diesem entspricht wieder:

$$\chi' = \frac{\gamma}{e}.$$

Dieser Werth von $x$ ist kraft unserer Voraussetzungen eine sehr kleine Grösse der ersten Ordnung zu nennen, während $\chi'$ für denselben in eine sehr grosse Zahl übergeht. Unsere Exponentialcurve wendet sich also in einer geringen Entfernung vom Anfangspunkte der

Coordinaten mit einer $S$-förmigen Krümmung scharf nach aufwärts und man ist bereits im Stande, sie sich in einem beiläufigen Zuge verzeichnet zu denken, wenn man erwägt, dass wieder schematisch die folgenden drei Werthe zusammenbestehen:

$$
(29)\qquad
\begin{array}{lll}
x = 0 \quad , & x = \frac{\log \beta}{\gamma} \quad , & x = \frac{2 \log \beta}{\gamma} \\
\tau = 1 \quad , & \tau = \frac{1}{\beta} \quad , & \tau = \frac{1}{\beta^2} \\
\chi = e^{-\beta} \quad , & \chi = \frac{1}{e} \quad , & \chi = e^{-\frac{1}{\beta}} = 1 - \frac{1}{\beta} + \ldots\ldots \\
\chi' = \beta\gamma e^{-\beta} , & \chi' = \frac{\gamma}{e} \quad , & \chi' = \frac{\gamma}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}} \\
\chi\tau = e^{-\beta} \quad , & \chi\tau = \frac{1}{\beta e} \quad , & \chi\tau = \frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta^2}.
\end{array}
$$

In einem Zwischenraume also, der $\frac{2 \log \beta}{\gamma}$, mithin auch noch eine sehr kleine Grösse der ersten Ordnung ist, steigt das $\chi$ von seinem kleinsten Werthe Null bis zu seinem grössten, nämlich Eins in die Höhe, wenn man auf einen kleinen Bruch von der Ordnung des $\frac{1}{\beta}$, der dem $\chi$ noch zur Einheit fehlt, nicht achtet, ein Unterschied, der dazu noch im ferneren Verlauf der Curve sehr bald ausgeglichen wird, weil am Endpunkte des hier betrachteten Curvenstückes dennoch eine namhafte Ansteigung herrscht, z. B. eine von 45°, wenn $\beta = \gamma$ ist.

Nachdem wir auf diese Weise eine genügende vorläufige Kenntniss der Function $\chi$ gewonnen haben, nehmen wir die Differentialgleichungen der schwingenden Bewegung eines so gestalteten Fadens vor, und zwar namentlich zuvörderst die zweite in $\eta$, welche die Gesetze der transversalen Schwingungen in sich enthält. Für das hier vorausgesetzte $\mu$ geht sie über in:

$$(30)\qquad [m + \chi^2(M - m)] \frac{d^2\eta}{dt^2} = S \frac{d^2\eta}{dx^2}.$$

Um vor allem anderen diejenigen Genüge leistenden Werthe auszuschliessen, welche gar keinen Schwingungszustand darstellen können und doch die Differentialgleichung erfüllen, nehmen wir:

$$(31)\qquad \eta = y \cos \alpha t \quad \text{oder} \quad \eta = y \sin \alpha t$$

unter $y$ eine reine Function von $x$ verstanden, die kein $t$ mehr in sich enthält. Beide Annahmen führen zu einerlei Differentialgleichung in $y$, nämlich:

$$(32)\qquad S \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 [m + \chi^2 (M - m)] y = 0.$$

Dass es sich um die Integration einer solchen handle, wird wohl schon mancher, mit Schwingungsproblemen beschäftigte Analyst bemerkt haben, aber die variablen Coëfficienten, die noch dazu Functionen enthalten der zweiten Classe, wie $\chi$ nämlich, haben ihnen die Hoffnung genommen, bis zum Integrale vordringen zu können, nachdem die vorhandenen Integrationsmethoden nicht einmal für Differentialgleichungen mit algebraischen Coëfficienten auslangen. Wenn wir auch vor der Hand keine Theorie besitzen der Differentialgleichungen mit Coëfficienten, die sich über die erste Functionsclasse erheben. z. B. mit Sinus, Cosinus oder Exponentialgrössen oder gar mit analytischen Gebilden, von der Natur des $\chi$; so beherrscht uns doch nicht mehr die Furcht vor veränderlichen Coëfficienten, und wir wissen mindestens, dass Differentialgleichungen mit Coëfficienten der 3. Classe, wie die hier vorliegende, höchstens Integrale der vierten Classe zulassen, und namentlich, wenn man sich solch' ein der vierten Classe zugehöriges $y$ denkt in der Form:

$$y = e^{\int \varphi\, dx} \tag{33}$$

so enthält die Function $\varphi$ in sich genau dieselben Ausdrücke der zweiten und dritten Classe, die sich auch in den Coëfficienten der Differentialgleichung vorfinden, denn erschienen sie hier nicht, so könnten sie auch dort nicht vorhanden sein. Endlich gewahren wir in der vorliegenden Differentialgleichung der zweiten Ordnung, deren zweiter zu $\frac{dy}{dx}$ gehöriger Coëfficient in die Null übergegangen ist, vom ersten auf den letzten Coëfficienten ein Ansteigen um zwei Einheiten in der Gradzahl nach $\chi$, mithin fällt auf das Coëfficientenpaar die Ansteigungszahl Eins und es ist $\varphi$ nach dem darin enthaltenen $\chi$ vom ersten Grade. Wir können es also versuchen, anzunehmen:

$$\begin{aligned} \varphi \; &= a\chi + b \\ \varphi^2 &= a^2\chi^2 + 2ab\chi + b^2 \\ \varphi' &\doteq a\beta\gamma\chi\tau\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Nun aber gibt zunächst die Einführung des Werthes (33) folgendes Substitutionsresultat:

$$e^{\int \varphi\, dx}\{S(\varphi^2 + \varphi') + \alpha^2(m + \chi^2[M - m])\} = 0 \tag{35}$$

und dieses verwandelt sich vermöge der Gleichungen (34) in:

$$0 = e^{\int \varphi\, dx}\{(Sa^2 + [M - m]\alpha^2)\chi^2 + a\beta\gamma S \,.\, \chi\tau + 2abS \,.\, \chi + m\alpha^2 + b^2 S\} \tag{36}$$

Existirt nun wirklich ein Integral von der erkiesenen Form, so muss dieses Substitutionsresultat gleich Null sein, sowohl für negative $x$, wie auch für positive, und namentlich auch für solche positive $x$, die sehr wenig von Null verschieden sind. Nun verschwinden für negative $x$ sowohl $\chi^2$, wie auch $\chi\tau$ und $\chi$, wie wir gesehen haben, es kann also dieses Resultat nicht gleich Null werden, ausgenommen wenn

$$m\alpha^2 + b^2 S \doteq 0 \tag{37}$$

besteht. Ja auch eine Summe von ähnlichen Ausdrücken, wie der (33) von $y$, mit verschiedenen $\varphi$ kann nicht anders Genüge leisten, als wenn jeder derselben die Differentialgleichung für sich erfüllt, wenn man mithin für jeden von ihnen eine Bestimmungsgleichung von der Art der eben hingestellten bestehen lässt. Man hat also nothwendig:

$$b = \pm h\alpha\sqrt{-1} \quad \text{wo} \quad h = \sqrt{\frac{m}{S}} \tag{38}$$

ist. Für positive $x$ lässt sich von der Differentialgleichung (32) und dem aus ihr gewonnenen Substitutionsresultate dasselbe sagen. Es muss nämlich identisch übergehen in die Null. Nun hat man aber für positive $x$, welche sich über die erste Ordnung der Kleinheit erheben und z. B. auch nur mit $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ comparabel sind:

$$\chi = \chi^2 = 1 \quad \text{und} \quad \chi\tau = 0\,,$$

mithin muss:

$$S(a+b)^2 + Ma^2 = 0 \tag{39}$$

sein. Hieraus folgt:

$$a + b = \pm\, k\alpha\sqrt{-1} \quad , \quad \text{wo } k = \sqrt{\frac{M}{S}} \tag{40}$$

ist. Da man nun $a+b$ nach Belieben mit jedem seiner zwei Werthe versehen und jeden von ihnen mit den zwei Werthen von $b$ zusammenstellen kann; so ergeben sich daraus vier Systeme zusammengehöriger Werthe für $a$ und $b$, nämlich:

$$\begin{array}{lllll} a = (k+h)\alpha\sqrt{-1} & , \quad (k-h)\alpha\sqrt{-1} & . \quad -(k+h)\alpha\sqrt{-1} & , \quad -(k-h)\alpha\sqrt{-1} \\ b = \quad -h\alpha\sqrt{-1} & , \quad h\alpha\sqrt{-1} & . \quad h\alpha\sqrt{-1} & . \quad -h\alpha\sqrt{-1}. \end{array} \tag{41}$$

Es bestehen daher auch, einem und demselben $\alpha$ angehörig, vier Integralausdrücke von der Form (33), die man mit beliebigen Constanten $C$, $D$, $E$, $F$ auch multipliciren und addiren kann und so ein viergliedriges Integral gewinnt, welches die Eigenschaft hat, Glied für Glied die Differentialgleichung zu erfüllen.

$$\begin{aligned} y = {} & C e^{\alpha\sqrt{-1}\int[(k+h)\chi - h]\,dx} + D e^{\alpha\sqrt{-1}\int[(k-h)\chi + h]\,dx} + \\ & + E e^{\alpha\sqrt{-1}\int[-(k+h)\chi + h]\,dx} + F e^{\alpha\sqrt{-1}\int[-(k-h)\chi - h)\,dx}. \end{aligned} \tag{42}$$

Aber nicht nur für positive und negative $x$, sondern auch für solche, die nahe an Null sind, soll das $y$ der Differentialgleichung Genüge leisten. Glied für Glied genommen thut es dies aber nicht, wie man sich leicht überzeugen kann, allein es ist dies auch nicht nothwendig, und es reicht vollkommen hin, wenn der gewonnene viergliederige Werth von $y$ für gewisse bestimmte Werthe der Constanten $C$, $D$, $E$, $F$ der Differentialgleichung Genüge zu leisten vermag, ja noch mehr, es reicht hin, wenn das Substitutionsresultat, das für positive und negative $x$ genau gleich Null ist, für sehr kleine $x$ sich auf eine Grösse zurückzieht von derselben Ordnung wie $\frac{1}{\beta}$ oder $\frac{1}{\gamma}$, welche bei dem unendlichen Wachsen von $\beta$ und $\gamma$ gegen Null convergirt. Ein solches viergliedriges $y$ wird nämlich darauf nicht Anspruch machen können, den Vorgang am Trennungspunkt: $x = 0$ genau anzugeben, ausser für unendliche $\beta$ und $\gamma$. Es wird daher von dem wahren $y$, das auch in der Nähe des Trennungspunktes die Erscheinungen in aller Strenge angibt, in etwas verschieden sein. Diese Verschiedenheit wird aber selbst in der Nähe des Trennungspunktes ihrem Zahlenwerthe nach sehr klein sein und an allen übrigen Orten ganz und gar verschwinden. Ein solches $y$ reicht aber zu unseren Zwecken um so mehr vollkommen hin, als wir im Allgemeinen den eigentlichen Vorgang am Trennungspunkte oder an der Trennungsfläche zweier verschiedener schwingenden Systeme experimentell zu verfolgen gar nicht im Stande sind. Wir denken uns mithin zuvörderst den viergliedrigen Ausdruck (42) in die Differentialgleichung eingeführt und vor der Hand nur insoferne darauf Rücksicht genommen, dass es sich um sehr kleine und positive $x$ handle, für welche $\chi$ weder durch Null zu ersetzen ist, noch durch Eins. Das Substitutionsresultat geht aus dem (36) durch Multiplication mit den vier Constanten $C$, $D$, $E$, $F$ und gleichzeitige Specialisirung von $a$, $b$ nach dem Schema (41) und Addition hervor und lautet, wie folgt:

$$
(43)\quad \begin{aligned}
&Ce^{\alpha\sqrt{-1}\int[(k+h)\chi-h]dx}[(-S(k+h)^2+M-m)\alpha^2\chi^2+\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k+h)S\chi\tau+2h(k+h)\alpha^2S\chi]+\\
&+De^{\alpha\sqrt{-1}\int[(k-h)\chi+h]dx}[(-S(k-h)^2+M-m)\alpha^2\chi^2+\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k-h)S\chi\tau-2h(k-h)\alpha^2S\chi]+\\
&+Ee^{\alpha\sqrt{-1}\int[-(k+h)\chi+h]dx}[(-S(k+h)^2+M-m)\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k+h)S\chi\tau+2h(k+h)\alpha^2S\chi]+\\
&+Fe^{\alpha\sqrt{-1}\int[-(k-h)\chi-h]dx}[(-S(k-h)^2+M-m)\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k-h)S\chi\tau-2h(k-h)\alpha^2S\chi]=0.
\end{aligned}
$$

Überdies verschaffen wir uns noch durch wirkliches Integriren den Werth von $\int\varphi\,dx$, unter $\varphi$ ganz allgemein den Ausdruck:

$$(44)\qquad \varphi = a\chi + b$$

verstanden. Es ist:

$$(45)\qquad \int\varphi\,dx = a\int\chi\,dx + b\int dx.$$

Durch theilweises Integriren aber bekommt man:

$$(46)\qquad \int\chi\,dx = \chi x - \int\chi' x\,dx = \chi x - \beta\gamma\int\chi\tau x\,dx$$

mithin:

$$(47)\qquad \int\varphi\,dx = (a\chi + b)x - a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx.$$

Innerhalb derjenigen Grenzen, wo unser Substitutionsresultat durch schickliche Wahl von $C$, $D$, $E$ und $F$ möglichst allgemein zu einer verschwindenden Grösse gemacht werden soll, nämlich zwischen $x=0$ und $x=\frac{2\log\beta}{\gamma}$, muss man sowohl $x$, wie auch $(a\chi+b)x$ für sehr klein und zwar der ersten Ordnung angehörig ansehen. Ein Gleiches gilt von dem Zusatzgliede:

$$-a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx.$$

Wir haben nämlich gesehen, dass das Product $\chi\tau$, welches im Allgemeinen sowohl für positive als negative $x$ verschwindet, für sehr nahe an Null liegende, nur sehr kleine Werthe anzunehmen fähig sei, von denen der grösste $\frac{1}{\beta e}$ ist. Hieraus folgt, dass das in Rede stehende Integral:

$$a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx < \frac{a\beta\gamma}{\beta e}\int x\,dx$$

sei, oder mit anderen Worten:

$$a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx < \frac{a\gamma x^2}{2e}.$$

Dies ist aber eine kleine Grösse der ersten Ordnung, eben weil $x$ eine solche ist. Für solche $x$ also, um die es sich hier handelt, d. h. für die zwischen den obangeführten Grenzen gelegenen, können wir $e^{\int\varphi\,dx}$ in eine convergirende Reihe mittelst der bekannten Formel entwickelt denken und von ihr nur ein paar Glieder beibehalten, nämlich:

$$
(48)\qquad \begin{aligned}
e^{\int\varphi\,dx} &= e^{(a\chi+b)x - a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx} =\\
&= 1 + (a\chi+b)x - a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx + \frac{1}{2}\left[(a\chi+b)x - a\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx\right]^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Substituiren wir hier anstatt $a$ und $b$ die vier unter (41) angeführten Systeme von Werthen und setzen wir die Resultate dieser Substitutionen hinein in die Gleichung (43); so ergibt sich:

$$
(49)\quad \begin{aligned}
0 = C\{1+\alpha\sqrt{-1}[(k+h)\chi-h]x-\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k+h)\textstyle\int\chi\tau x\,dx\} \times \\
\{[--S(k+h)^2+M-m]\alpha^2\chi^2+\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k+h)S\chi\tau+2h(k+h)\alpha^2S\chi\} \\
+D\{1+\alpha\sqrt{-1}[(k-h)\chi+h]x-\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k-h)\textstyle\int\chi\tau x\,dx\} \times \\
\{[-S(k-h)^2+M-m]\alpha^2\chi^2+\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k-h)S\chi\tau-2h(k-h)\alpha^2S\chi\} \\
+E\{1+\alpha\sqrt{-1}[-(k+h)\chi+h]x+\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k+h)\textstyle\int\chi\tau x\,dx\} \times \\
\{[-S(k+h)^2+M-m]\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k+h)S\chi\tau+2h(k+h)\alpha^2S\chi\} \\
+F\{1+\alpha\sqrt{-1}[-(k-h)\chi-h]x+\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k-h)\textstyle\int\chi\tau x\,dx\} \times \\
\{[-S(k-h)^2+M-m]\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\gamma\sqrt{-1}(k-h)S\chi\tau-2h(k-h)\alpha^2S\chi\}
\end{aligned}
$$

Wir fangen nun damit an, das vorliegende Substitutionsresultat zu entwickeln und nach seinen Bestandtheilen zu gliedern, die, so lange $C$, $D$, $E$, $F$ noch aller möglichen Werthe fähig gedacht werden, verschiedenen Grössenordnungen insoferne angehören, als sie verschiedenen Potenzen oder Potenzproducten der ins Unendliche wachsenden Zahlen $\beta$ und $\gamma$ proportional gedacht werden. Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass $\chi$ und $\chi^2$, als des grössten Werthes Eins fähig, der $0^{\text{ten}}$ Grössenordnung zuzuzählen seien; hingegen sind $x$, so wie auch $\chi\tau$ und $\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx$ von derselben ersten Ordnung der Kleinheit, da ihre Maxima in dem in Rede stehenden Intervalle beziehlich $\frac{2\log\beta}{\gamma}$, $\frac{1}{\beta e}$ und höchstens $\frac{2\log^2\beta}{\gamma e}$ sind, demungeachtet hat aber das in unserer Gleichung erscheinende Product $\beta\gamma\chi\tau$ einen Maximumwerth $\frac{\gamma}{e}$, der eine ins Unendliche wachsende Grösse andeutet, mithin kommen in dem entwickelten Substitutionsresultate Glieder vor von der Ordnung des sehr grossen $\gamma$, dann Glieder von der Ordnung Null, worauf endlich andere folgen von der ersten, zweiten, dritten Ordnung der Kleinheit u. s. w. Wir sind, die letzteren ausser Acht lassend, nur beflissen, die sehr grossen mit $\gamma$ vergleichbaren und die der Ordnung Null angehörigen, durch schickliche Wahl der Constanten $C$, $D$, $E$, $F$ herabzubringen auf die erste Ordnung der Kleinheit, daher wir denn unser Substitutionsresultat auch nur in diesem Grade der Entwicklung hinstellen, wie folgt:

$$
(50)\qquad L\chi\tau+R[-2\chi^2+2\chi+\beta\gamma\chi\tau x]+N[-\chi^2\tau x+\beta\gamma\chi\tau\textstyle\int\chi\tau x\,dx].
$$

Hier sind $L$, $R$, $N$ constante Coëfficienten, versehen mit den nachstehenden Werthen:

$$
(51)\quad \begin{aligned}
L &= \alpha\beta\gamma S\sqrt{-1}[(k+h)(C-E)+(k-h)(D-F)] \\
R &= \alpha^2hS[(k+h)(C+E)-(k-h)(D+F)] \\
N &= \alpha^2\beta\gamma S[(k+h)^2(C+E)+(k-h)^2(D+F)]
\end{aligned}
$$

und es wird offenbar der in Rede stehende Theil des Substitutionsresultates genau auf Null reducirt, mithin das Resultat selbst in eine bei dem unendlichen Wachsen von $\beta$ und $\gamma$ gegen Null convergirende Grösse verwandelt, wenn man die Constanten $C$, $D$, $E$, $F$ so wählt, dass sie die folgenden drei Bestimmungsgleichungen erfüllen:

$$(k+h)\ (C-E)+(k-h)\ (D-F)=0$$
$$(52)\qquad (k+h)\ (C+E)-(k-h)\ (D+F)=0$$
$$(k+h)^2(C+E)+(k-h)^2(D+F)=0\,.$$

Den zwei letzten unter ihnen kann nur dadurch Genüge geleistet werden, dass man:

$$(53)\qquad C+E=0 \quad \text{und} \quad D+F=0$$

annimmt mit Ausnahme des Falles $k=h$, der aber hier ausgeschlossen werden muss, weil er einem Faden von allenthalben gleicher Stärke angehört, der nicht der Gegenstand dieser Betrachtungen ist. Dem zufolge gibt aber die erste der vorliegenden drei Bestimmungsgleichungen:

$$(k+h)C+(k-h)D=0$$

mithin hat man:

$$(54)\qquad \frac{C}{D}=\frac{E}{F}=-\frac{k-h}{k+h}\,.$$

Eine der vier Constanten bleibt also unbestimmt, und bezeichnet man eine neue Constante mit $H\sqrt{-1}$, der diese vier alle proportional gedacht werden, so kann man annehmen:

$$(55)\qquad C=-\frac{(k-h)}{2}H\sqrt{-1}\quad,\quad D=\frac{(k+h)}{2}H\sqrt{-1}\quad,\quad E=+\frac{(k-h)}{2}H\sqrt{-1}\quad,$$
$$F=-\frac{(k+h)}{2}H\sqrt{-1}\,.$$

Diese Werthe in die Gleichung (42) in $y$ einführend und sodann die imaginären Exponentiellen in trigonometrische Functionen Sinus und Cosinus verwandelnd, sieht man den Cosinus verschwinden und das $y$ in ein particuläres Integral mit einer einzigen Constanten $H$ sich verwandeln, nämlich:

$$(56)\qquad y=H\{(k-h)\sin[\alpha\textstyle\int[(k+h)\chi-h]\,dx]-(k+h)\sin[\alpha\int[(k-h)\chi+h]\,dx]\}\,.$$

Hat man aber bei einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung ein particuläres Integral, so kann man vermittelst des Kunstgriffes der Befreiung von demselben sich allsogleich auch das zweite verschaffen, und zwar wenn allgemein die Differentialgleichung

$$(57)\qquad X_2y''+X_1y'+X_0y=0$$

heisst, vermittelst der Substitution:

$$(58)\qquad y=y_1\textstyle\int z\,dx\,,$$

allwo $y_1$ den einen bekannten Genüge leistenden Werth, und $z$ eine neue abhängige Veränderliche andeuten. Die neue Transformirte in $z$ ist in ihrer vollen Ausdehnung:

$$(59)\qquad [X_2y_1''+X_1y_1'+X_0y_1]\textstyle\int z\,dx+[2X_2y_1'+X_1y_1]z+X_2y_1z'=0\,.$$

Sie verwandelt sich für den vorliegenden Fall, in welchem $X_2=S$, $X_1=0$ und $X_0=\alpha^2[m+\chi^2(M-m)]$ besteht, in:

$$(60)\qquad \{Sy_1''+\alpha^2[m+\chi^2(M-m)]y_1\}\textstyle\int z\,dx+2Sy_1'\cdot z+Sy_1z'=0\,.$$

Wäre nun unser für $y$ ermittelter Werth (56) in aller Strenge ein particuläres Integral, d. h. reducirte er das Polynom der Differentialgleichung (32) für beliebige $\beta$ und $\gamma$ auf Null, so würde auch das mit $\int z\,dx$ als Factor verknüpfte Glied in aller Strenge den Factor Null bekommen und wegfallen, da aber dies unser $y$ nicht leistet, und, in die Differentialgleichung eingeführt, nur ein Substitutionsresultat liefert, welches bei dem unendlichen Wachsen von $\beta$ und $\gamma$ convergirt gegen Null, so hat es auch dieselbe Bewandtniss mit dem ersten Bestandtheile unserer Transformirten in $z$, d. h. er ist eine bei dem Wachsen von $\beta$ und $\gamma$ ins Unendliche abnehmende Grösse. Wir werden auf denselben, um keine Vorsicht zu verabsäumen, später zurückkommen und eine genauere Kenntniss des Werthes, den er annehmen kann, und seines Einflusses auf die Gestalt des Integrales zu gewinnen suchen. Einstweilen also vorausgesetzt, dass nicht blos der Factor von $\int z\,dx$ die Eigenschaft besitze für unendliche $\beta$ und $\gamma$ zu verschwinden, sondern auch das Product, hat man für solche bereits sehr gross gedachte $\beta$ und $\gamma$:

$$2Sy_1'z + Sy_1z' = 0. \tag{61}$$

Dies gibt auf dem Wege der Integration:

$$z = \frac{G}{y_1^2} \tag{62}$$

unter $G$ die Constante der Integration verstanden. Setzt man nun anstatt $y_1$ das Aggregat von zwei Sinusen der (56) und anstatt $z$ den eben gewonnenen Werth in die (58), so hat man das allgemeine Integral mit zwei willkürlichen Constanten in folgender Gestalt

$$\begin{aligned} y = \frac{G}{II}\{(k-h)\sin[a\textstyle\int((k+h)\chi-h)\,dx] - (k+h)\sin[a\textstyle\int((k-h)\chi+h)\,dx]\}\times \\ \times\int\frac{dx}{\{(k-h)\sin[a\int((k+h)\chi-h)\,dx]-(k+h)\sin[a\int((k-h)\chi+h)\,dx]\}^2}. \end{aligned} \tag{63}$$

Es sind darin zwei Constante vorhanden: Man kann nämlich $\frac{G}{II}$ als die erste derselben auffassen, während die zweite dem als Factor angehängten Integralausdrucke angehört. Die Werthe dieser Constanten entnehmen wir, wie gewöhnlich, den Bedingungen an den Grenzen des schwingenden Systemes und bemerken, um diese festzustellen, dass das Schwingungsproblem einer gespannten Saite in zwei verschiedenen Fassungen vorliegen kann. Man kann nämlich erstens den Faden als unbegrenzt ansehen mit seinem schwächeren Ende von $-\infty$ bis 0, mit seinem stärkeren von 0 bis $+\infty$ reichend und ohne einen irgendwie festgehaltenen Punkt. Diese Voraussetzung führt nämlich zu den Gesetzen der Fortpflanzung und Reflexion der Wellen in einem solchen linearen Systeme in ihrer einfachsten Gestalt. Man kann aber auch zweitens die Saite nicht blos als Fortpflanzungsmittel einer Bewegung, sondern als tönend ansehen und ihr eine begrenzte Länge geben. Wir setzen, um sie festzustellen, voraus, dass der Faden mit seinem schwächeren Theile von $x = -l$ bis $x = 0$ reiche, und mit seinem stärkeren Ende auf der Seite der positiven Coordinaten von $x = 0$ bis $x = \lambda$ ausgedehnt sei, an seinen beiden Enden, d. h. bei $x = -l$ und bei $x = \lambda$ sei er festgeklemmt, so dass an diesen beiden Punkten $y = 0$ wird und zwar zu jeder Zeit $t$; so bewirkt man das Verschwinden des gewonnenen $y$ für $x = -l$ dadurch, dass man das Integral anfangen lässt bei $x = -l$, was einer Bestimmung der ihm angehörigen Integrationsconstante gleichkommt, dann aber muss noch überdies $\alpha$ so gewählt werden, dass von Neuem ein Verschwinden von $y$ für $x = \lambda$ erfolgt. Bezeichnen wir die Constante $\frac{G}{H}$ durch $K$, so ergibt sich für beliebige $x$:

$$(64)\qquad y = K\{(k-h)\sin[\alpha\int((k+h)\chi-h)\,dx] - (k+h)\sin[\alpha\int((k-h)\chi+h)\,dx]\} \times$$
$$\times \int_{-l}^{x} \frac{dx}{\{(k-h)\sin[\alpha\int((k+h)\chi-h)\,dx] - (k+h)\sin[\alpha\int((k-h)\chi+h)\,dx]\}^2}$$

oder mit Rücksicht darauf, dass:

$$(65)\qquad \begin{aligned} \int[(k+h)\chi-h]\,dx &= (k+h)\chi x - hx - (k+h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx \\ \int[(k-h)\chi+h]\,dx &= (k-h)\chi x + hx - (k-h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx \end{aligned}$$

ist, in entwickelterer Gestalt:

$$(66)\qquad \begin{aligned} y = K\{&(k-h)\sin[\alpha((k+h)\chi x - hx - (k+h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)] - \\ &-(k+h)\sin[\alpha((k-h)\chi x + hx - (k-h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)]\} \times \end{aligned}$$
$$\times\int_{-l}^{x}\frac{dx}{\{(k-h)\sin[\alpha((k+h)\chi x - hx - (k+h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)] - (k+h)\sin[\alpha((k-h)\chi x + hx - (k-h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)]\}^2}$$

und diese etwas lange Formel ist es, die den Werth von $y$ allgemein für grosse $\beta$ und $\gamma$ richtig angibt, für positive sowohl, wie auch für negative und für solche $x$, die nahe an Null liegen. Sie gestattet, sowohl auf der negativen Coordinatenaxe der $x$, wie auch auf der positiven bedeutende Abkürzungen, verwandelt sich aber jederseits in eine andere. Namentlich hat man für negative $x$, von $x = -l$ bis $x = 0$ überall $\chi = 0$ und $\chi\tau = 0$, mithin geht $y$ im ganzen Bereiche des dünneren Endes des Fadens, d. h. der negativen $x$ über in folgenden einfacheren Ausdruck:

$$(67)\qquad y = -\frac{K}{2k}\sin\alpha hx\int_{-l}^{x}\frac{dx}{\sin^2\alpha hx} = \frac{+K}{2\alpha kh}\left[\cos\alpha hx + \frac{\cos\alpha hl}{\sin\alpha hl}\sin\alpha hx\right] =$$
$$= \frac{+Kk}{2\alpha hk^2\sin\alpha hl}\sin[\alpha h(x+l)].$$

Diese Formel setzt bereits für $x = -l$ einen festen Punkt oder Schwingungsknoten voraus. Wäre kein solcher vorhanden und hätte die Seite in der Richtung der negativen $x$ eine unbegrenzte Ausdehnung, so brauchte man nur sich über die untere Integrationsgrenze nicht zu erklären und dem Integralausdrucke eine willkürliche Constante beizufügen, d. h. man hätte die folgende Formel aufzustellen:

$$(68)\qquad y = \frac{K}{2\alpha k^2 h}[k\cos\alpha hx + kJ\sin\alpha hx].$$

Die hinzugefügte Integrationsconstante heisst hier $J$ und ersetzt, wie man sieht, in der vorhergehenden Formel den Bruch $\frac{\cos\alpha hl}{\sin\alpha hl}$. Diese Formel gilt, wie gesagt, für negative $x$ und für ein nach dieser Seite hin unbegrenztes System.

Für positive $x$ hingegen, die von Null verschieden sind, hat man $\chi = 1$, ferner $\chi\tau = 0$, und das als Factor in der allgemeinen Formel vorhandene Integral kann durch Zerlegung des Intervalles zwischen den Integrationsgrenzen in drei verschiedene bestimmte Integrale zerlegt werden. Das erste besitzt die Grenzen $-l$ und $-\varepsilon$, unter $\varepsilon$ eine sehr kleine Linie verstanden, das zweite ist mit den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ versehen, das dritte ist ausgedehnt von $+\varepsilon$ bis zu demjenigen $x$, für welches das angehörige $y$ gerechnet werden soll. Da man aber in dem ersten dieser drei Intervalle überall $\chi = \chi\tau = 0$ hat, so ergibt sich der Werth des ersten dieser drei Integralbestandtheile, d. h. des zwischen den Grenzen $-l$ und $-\varepsilon$ genommenen:

$$\frac{1}{4\,a\,h\,k^2}\left\{+\frac{\cos a\,h\,\varepsilon}{\sin a\,h\,\varepsilon}-\frac{\cos a\,h\,l}{\sin a\,h\,l}\right\},$$

ferner zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ hat überall $x$ einen sehr kleinen Werth und der Sinus eines solchen Ausdruckes, wie die in der Formel (65) vorfindigen, kann in diesem Bereiche füglich ersetzt werden durch den Bogen. Thut man dies, so ergibt sich:

$$(69)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{dx}{\{(k-h)\sin[a((k+h)\chi x-hx-(k+h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)]-(k+h)\sin[\alpha((k-h)\chi x+hx-(k-h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)]\}^2}$$

$$=\int_{-2}^{+\varepsilon}\frac{dx}{4\,a^2\,k^2\,h^2\,x^2}=-\frac{1}{2\,a^2\,k^2\,h^2\,\varepsilon}$$

In dem dritten Intervalle endlich, nämlich von $\varepsilon$ bis $x$, hat man, wenn $\varepsilon$ gleich oder grösser als $\frac{2\log\beta}{\gamma}$ gewählt wird, allenthalben:

$$\chi = 1 \qquad \text{und} \qquad \chi\tau = 0.$$

Mithin ergibt sich der folgende Werth dieses letzten Integralbestandtheiles:

$$(70)\qquad \int_{\varepsilon}^{x}\frac{dx}{4\,h^2\sin^2 a\,k\,x}=\frac{1}{4\,a\,h^2\,k}\left\{-\frac{\cos a\,k\,x}{\sin a\,k\,x}+\frac{\cos a\,k\,\varepsilon}{\sin a\,k\,\varepsilon}\right\}.$$

Aggregirt man jetzt die drei gewonnenen Integralbestandtheile mit Rücksicht darauf, dass vermöge des sehr kleinen Werthes von $\varepsilon$:

$$\frac{\cos a\,k\,\varepsilon}{\sin a\,k\,\varepsilon}=\frac{1}{a\,k\,\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{\cos a\,h\,\varepsilon}{\sin a\,h\,\varepsilon}=\frac{1}{a\,h\,\varepsilon}$$

besteht, so erhält man sofort für positive $x$:

$$(71)\int_{-l}^{x}\frac{dx}{\{(k-h)\sin[a((k-h)\chi x-hx-(k+h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)]-(k+h)\sin[a((k-h)\chi x+hx-(k-h)\beta\gamma\int\chi\tau x\,dx)]\}^2}$$

$$=-\frac{1}{4\,a\,h^2\,k^2}\left\{h\,\frac{\cos a\,h\,l}{\sin a\,h\,l}+k\,\frac{\cos a\,k\,x}{\sin a\,k\,x}\right\}.$$

Bei einem nach der negativen Seite hin unbegrenzten Systeme hat man sich auch hier über die untere Integrationsgrenze nicht zu erklären und dem unbestimmten Integrale eine willkürliche Constante $J$ anzuhängen, die, wie schon früher bemerkt, an die Stelle des Bruches $\frac{\cos a\,h\,l}{\sin a\,h\,l}$ tritt, so dass also der in Gestalt eines Integrales im Werthe von $y$ erscheinende Factor für alle positiven $x$, die von Null verschieden sind, und für einen nach beiden Seiten hin, nach jener der negativen und positiven Coordinaten $x$ nämlich, unbegrenzten Faden den folgenden Werth annimmt:

$$-\frac{1}{4ah^2k^2}\left\{hJ+k\frac{\cos akx}{\sin akx}\right\}.$$

Der andere Factor bekömmt dagegen für positive $x$ den monomischen Werth:

$$-2hK\sin akx,$$

mithin ist das gesuchte $y$ selbst für positive $x$:

(72) $$y=\frac{K}{2ak^2h}\{hJ\sin akx+k\cos akx\}.$$

Wir wollen vor allem Anderen diesen Fall einer beiderseits unbegrenzten Saite, dem die Formeln (68) und (72), die erste giltig für negative $x$, die zweite für positive, angehören, der näheren Betrachtung unterwerfen. Wir bilden zu diesem Zwecke aus dem gefundenen $y$ die wirkliche Entfernung des Punktes $x$ aus seiner Ruhelage, die gleich anfänglich mit $\eta$ bezeichnet worden ist, durch Multiplication mit dem Binome:

$$A\cos at+B\sin at$$

und erhalten für $x<0$:

(73) $$\eta=\frac{K}{2ahk^2}[k\cos ahx+kJ\sin ahx]\,[A\cos at+B\sin at]$$

für $x>0$:

(74) $$\eta=\frac{K}{2ahk^2}[k\cos akx+hJ\sin akx]\,[A\cos at+B\sin at].$$

$A$ und $B$ bedeuten zwar hier eben so gut, wie $J$ und $K$ willkürliche Constanten, denen aber in beiden Formeln einerlei Werth ertheilt werden muss. Indem man die Producte von Sinus und Cosinus, die in denselben vorkommen, in Sinus und Cosinus der Summe und Differenz der Bogen umsetzt, erhält man aus ihnen für negative $x$:

(75) $$\eta=\frac{K}{4ahk}\left\{\begin{array}{l}(A+BJ)\cos a(hx-t)+(A-BJ)\cos a(hx+t)+\\+(JA+B)\sin a(hx+t)+(JA-B)\sin a(hx-t)\end{array}\right\}$$

für positive $x$:

(76) $$\eta=\frac{K}{4ahk^2}\left\{\begin{array}{l}(kA+hBJ)\cos a(kx-t)+(kA-hBJ)\cos a(kx+t)+\\+(hAJ+kB)\sin a(kx+t)+(hAJ-kB)\sin a(kx-t)\end{array}\right\}.$$

Ein jedes dieser beiden $\eta$ besteht aus vier Theilen, deren jeder eine gewisse mit der Zeit sowohl, wie auch mit dem Orte veränderliche Verschiebung ausdrückt und die übereinander gelegt die resultirende $\eta$ selber geben. Um die Beschaffenheit eines jeden Bestandtheiles, wie

$$C\cos a(hx\pm t)$$

zu erforschen und hieraus ein geometrisches Bild des $\eta$ selbst zusammenzustellen, denke man sich $t$ um $\varDelta t$ und $x$ um $\varDelta x$ wachsend, so jedoch, dass $hx\pm t$ unverändert bleibt. Dies wird der Fall sein, wenn

(77) $$h\varDelta x\pm\varDelta t=0\quad,\quad\text{mithin }\varDelta t=\mp h\varDelta x$$

besteht. Dies heisst mit anderen Worten, in der Zeit den Ort so zu verändern, dass die elementare Verschiebung dieselbe bleibt, oder mit derselben Bewegungsgrösse beziehlich Wellenhöhe mitgehen. $\Delta x$ ist dann der bei einer solchen Verfolgung in der Zeit $\Delta t$ durchlaufene Raum und man sieht aus der Gestalt der Gleichung (77), dass dieselbe Verschiebung, die man sich nach Belieben als Wellenhöhe Maximum oder auch Null denken kann, mit der Geschwindigkeit $\mp \frac{1}{h}$ längs der Axe der $x$ fortgepflanzt werde. Es bedeutet also ein jeder Sinus oder Cosinus einer Differenz einen Wellenzug, der in der Richtung gegen das positive Ende der Axe der $x$ fortschreitet, dagegen jeder Sinus oder Cosinus einer Summe einen gegen das negative Ende eben derselben Axe sich fortbewegenden Wellenzug, und es beweisen die vorliegenden zwei Formeln für $\eta$, dass vier solche Wellenzüge in der schwächeren sowohl, wie auch in der stärkeren Hälfte des Fadens als einander entsprechend zusammen bestehen können.

Man trägt stets Sorge, complicirtere Bewegungen, soweit dies angeht, auf einfachere zurückzuführen, weil dies zur möglichst klaren Auffassung des ganzen Herganges der Erscheinungen dienlich ist. Es kann daher auch hier die Frage entstehen, ob sich nicht diese aus vier Wellenzügen beiderseits zusammengesetzte Bewegung in mehrere einfachere zerlegen lasse, die einander ebenfalls entsprechen und zusammen bestehen können. Man sieht sehr bald, dass dem wirklich so sei, denn man kann erstens einmal $A = 0$ und $B$ von der Null verschieden, dann zweitens $B = 0$ und $A$ von der Nulle verschieden annehmen und bekömmt auf diese Weise einfachere Werthe von $\eta$, die aber immer noch viergliedrig sind, mithin beiderseits vier verschiedene Wellenzüge andeuten. Man kann aber auch über die Werthe der vier Constanten $A$, $B$, $K$, $J$ noch in einer anderen Weise verfügen, so nämlich, dass auf einer Seite, z. B. der der positiven $x$, nicht vier, sondern nur zwei Wellenzüge vorkommen, die noch dazu in einerlei Richtung, z. B. gegen das positive Ende der Axe der $x$ zu fortschreiten. Dies wird der Fall sein, wenn in der Formel (76) Sinus und Cosinus der Summe je die Nulle zum Factor erhalten, also wenn:

$$(78) \qquad kA - hBJ = 0 \quad \text{und} \quad hAJ + kB = 0$$

ist. Die beiden Formeln (75) und (76) gehen unter diesen Umständen über in:

$$(79) \qquad \begin{aligned} \eta &= \frac{KJ}{4a\,h\,k^2}\left\{\begin{array}{l} B\left[(h+k)\cos a\,(hx-t) + (h-k)\cos a\,(hx+t)\right] + \\ + A\left[(k-h)\sin a\,(hx+t) + (k+h)\sin a\,(hx-t)\right] \end{array}\right\} \\ \eta &= \frac{KJ}{4a\,h\,k^2}\left\{2Bh\cos a\,(kx-t) + 2Ah\sin a\,(kx-t)\right\}. \end{aligned}$$

Hier sind jedoch die bestimmten $A$ und $J$ doppelwerthig, weil sie so aus den beiden Gleichungen (78) hervorgehen. Man hat nämlich durch Auflösung derselben:

$$(80) \qquad A = \pm B\sqrt{-1} \quad . \quad J = \pm \frac{k}{h}\sqrt{-1}$$

allwo die oberen und unteren Zeichen einander entsprechen. Die Substitution dieser Werthe für $A$ und $J$ erst mit dem oberen, dann auch mit dem unteren Zeichen führt zu folgenden zwei Paaren von Werthen für $\eta$, die als zwei Auflösungen, wenn auch als imaginäre, des Schwingungsproblemes zu betrachten sind:

$$
(81)\quad
\begin{cases}
\text{für } x < 0 & \eta = \frac{KB}{4ah^2k}\left\{\begin{array}{l}(h-k)\sin a(hx+t)-(h+k)\sin a(hx-t)+\\ +\sqrt{-1}\,[(h+k)\cos a(hx-t)+(h-k)\cos a(hx+t)]\end{array}\right\} \\
\text{für } x > 0 & \eta = \frac{KB}{4ah^2k}\{-2h\sin a(kx-t)+2h\sqrt{-1}\cos a(kx-t)\}
\end{cases}
$$

und

$$
(82)\quad
\begin{cases}
\text{für } x < 0 & \eta = \frac{KB}{4ah^2k}\left\{\begin{array}{l}(h-k)\sin a(hx+t)-(h+k)\sin a(hx-t)-\\ -\sqrt{-1}\,[(h+k)\cos a(hx-t)+(h-k)\cos a(hx+t)]\end{array}\right\} \\
\text{für } x > 0 & \eta = \frac{KB}{4ah^2k}\{-2h\sin a(kx-t)-2h\sqrt{-1}\cos a(kx-t)\}.
\end{cases}
$$

Da nun aber vermöge der linearen Form der Gleichung in $\eta$ nicht blos diese Werthe als Genüge leistende zu betrachten sind, sondern dazu noch alle diejenigen, die man aus ihnen gewinnt durch Multiplication mit beliebigen Constanten und Addition, so wird man sie auch zu einander addiren und von einander abziehen können. Die so erhaltene Summe und Differenz, mit beliebigen Constanten multiplicirt, sind dann ebenfalls und zwar sehr einfache Genüge leistende Werthe, welche die Bedeutung elementarer Schwingungsweisen haben. Man hat also auch:

$$
(83)\quad
\begin{cases}
\text{für } x < 0 & \eta = \mathfrak{A}\,[(k-h)\sin a(hx+t)+(h+k)\sin a(hx-t)] \\
\text{für } x > 0 & \eta = 2h\mathfrak{A}\sin a(kx-t)
\end{cases}
$$

oder:

$$
(84)\quad
\begin{cases}
\text{für } x < 0 & \eta = \mathfrak{B}\,[(h+k)\cos a(hx-t)+(h-k)\cos a(hx+t)] \\
\text{für } x > 0 & \eta = 2h\mathfrak{B}\cos a(kx-t).
\end{cases}
$$

Das Ergebniss dieser Rechnungen ist, dass es zwar sehr einfache Schwingungsweisen gibt, bestehend aus einem einzigen Wellenzuge auf der Seite der positiven $x$, der auch dem Ende dieser positiven Axe zuschreitet, und zwei in entgegengesetzten Richtungen sich bewegenden Wellenzügen auf der Halbaxe der negativen $x$. Sie können aber durch die in der Form (75), (76) gewonnene Integralformel nicht dargestellt werden, erscheinen jedoch als Resultat zweier imaginärer in dieser Gestalt gewonnener Auflösungen. Welches Paar von Formeln man nun auch immer erwählen mag, gleichgiltig, ob das mit den Sinusen oder das zweite mit den Cosinusen, immer hat man es mit drei Schwingungsweisen zu thun, deren Amplituden sich zu einander verhalten, wie die Grössen:

$$k+h\quad,\quad 2h\quad,\quad k-h\,.$$

Die Wellenzüge, zu denen sie gehören, könnte man den einfallenden, gebrochenen und reflectirten Wellenzug nennen, diese Bezeichnungen aus der Licht- und Schalllehre auch auf die Saitenschwingungen übertragend.

Man kann aber auch durch Übereinanderlegen von unendlich vielen solchen Wellenzügen eine einzige Welle erzeugen, z. B. eine solche, die im Momente $t=0$ auf der Seite der negativen Coordinaten befindlich gegen den Anfangspunkt beim Wachsen der Zeit sich bewegt und alldort reflectirt und gebrochen wird. Da man auf diese Weise die allerklarste Einsicht in den Vorgang dieser Erscheinung gewinnt, so wollen wir auf diesem Wege die allgemeine Auflösung unseres Schwingungsproblemes vornehmen. Zu diesem Behufe mag bemerkt werden, dass in den vorliegenden zwei Paaren der Gleichungen für $\eta$ die Constanten

$A$ und $B$ auch Functionen von $\alpha$ sein können und noch überdies von einer neuen Grösse $\rho$. Man kann namentlich annehmen:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\rho . f(\rho) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\pi} \cos \alpha\rho . f(\rho), \tag{85}$$

überdies kann man noch beide Paare von Werthen für $\eta$ multipliciren mit dem Factor $d\alpha d\rho$ und erhält auf diese Weise Ausdrücke, die auch die Eigenschaft haben, Auflösungen zu sein des Schwingungsproblemes. Endlich kann man die Summe, oder was dasselbe ist, das Integral des so erzeugten Differentialausdruckes nach $\alpha$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$, nach $\rho$ aber zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nehmen. Auf diese Weise ergibt sich aus den vorliegenden vier Formeln für $\eta$, zu zweien zusammengenommen, das folgende Paar von Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{für } x < 0 \quad \eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [(h+k) \cos \alpha (hx - t - \rho) - (k - h) \cos \alpha (-hx - t - \rho)] f(\rho)\, d\alpha\, d\rho \\ &\text{für } x > 0 \quad \eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} 2h \cos \alpha (kx - t - \rho) f(\rho)\, d\alpha\, d\rho \end{aligned} \tag{86}$$

oder vermöge der wohlbekannten Fourier'schen Formel:

$$\begin{aligned} &\text{für } x < 0 \quad \eta = (h+k) f(hx - t) - (k - h) f(-hx - t) \\ &\text{für } x > 0 \quad \eta = 2h f(kx - t). \end{aligned} \tag{87}$$

Dies ist vorderhand ein Integral mit einer einzigen willkürlichen Function $f$, dem man den Gang der Erscheinungen entnehmen kann auf folgende Weise: Angenommen, man hätte im Momente $t = 0$ auf der Seite der positiven Coordinaten $x$ noch gar keine Bewegung, so dass dort allenthalben $\eta = 0$ besteht. Da dies $f(kx) = 0$ verlangt, so entspringt aus einer solchen Voraussetzung allsogleich eine Eigenschaft der Function $f(x)$. Sie verschwindet nämlich für alle positiven Werthe der darin enthaltenen Veränderlichen. Nur für negative $x$, so wollen wir annehmen, sei die Function $f(x)$ von der Nulle verschieden und zwar habe sie für $x = -b$ einen grössten Werth $g$ und nehme von da an bis zu $x = -b - \delta$ und $x = -b + \delta$ bis zu Null ab, so dass also die Function $f$ die Eigenschaft hat, zu verschwinden für alle Werthe der darin enthaltenen Veränderlichen von $-\infty$ an bis zu $-b - \delta$, von da an bis zu dem Werthe $-b$ dieser Veränderlichen zu einem Maximum $g$ emporzusteigen, dann von $x = -b$ bis $x = -b + \delta$ wieder bis zu Null abzunehmen und endlich in dem ganzen Intervalle von $-b + \delta$ bis $+\infty$ abermals zu verschwinden. Es entspricht diesen Voraussetzungen im Zeitmomente $t = 0$ auf der Seite der negativen $x$ ein Werth von $\eta$, nämlich:

$$\eta = (k+h) f(hx) - (k-h) f(-hx) \tag{88}$$

dessen zweiter Bestandtheil der Nulle gleich ist, weil für alle negativen $x$ die Variable unter dem Functionszeichen, die dort $-hx$ ist, lauter positive Werthe erhält und weil vorausgesetztermassen die Function $f$ die Eigenschaft hat, für positive Werthe der Variablen zu verschwinden. Man hat also im Momente $t = 0$ einfacher Weise:

$$\eta = (k + h) f(hx). \tag{89}$$

Besitzt nun $f(x)$ ein Maximum $g$ für $x = -b$, so wird offenbar auch $f(hx)$ dasselbe Maximum $g$ besitzen müssen und zwar für $hx = -b$ oder für $x = -\frac{b}{h}$ und ist der Bereich der von Null verschiedenen Werthe des $f(x)$ in den Grenzen $x = -b \pm \delta$ eingeschlossen, so hat auch $f(hx)$ solche nicht verschwindende Werthe nur zwischen den Grenzen $hx = -b \pm \delta$, mithin $x = -\frac{b \mp \delta}{h}$. Dies gibt, wie man sieht, auf der Seite der negativen $x$ eine Welle von der Länge $\frac{2\delta}{h}$ und von der Höhe $(h+k)g$. Nun lassen wir die Zeit $t$ allmählich wachsen, so wird anfänglich immer noch $-hx-t$ für negative $x$ eine positive Grösse darstellen, mithin der zweite Theil des Werthes von $\eta$ verschwinden; der erste $(h+k)f(hx-t)$ aber wird sein Maximum $=(k+h)g$ besitzen für $hx-t=-b$, mithin für $x=\frac{t-b}{h}$. Dieses Maximum hat sich daher, ohne etwas an seinem Werthe zu verlieren, in der Richtung gegen das positive Ende der Axe der $x$ mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ in Bewegung gesetzt; Länge sowohl, wie auch Höhe der Welle sind hiebei, wie gesagt, dieselben geblieben. Sie ist nur dem Anfangspunkte der Coordinaten um ein Stück $\frac{t}{h}$ näher gerückt. Auf der Seite der positiven $x$ findet einstweilen noch keine Bewegung Statt.

Die Welle erreicht nun den Anfangspunkt der Coordinaten, wenn $t=b$ ist, und in diesem Momente ist die Bewegung bereits auf die Seite der positiven $x$ übergetreten und man hat namentlich für $x=0$, d. h. im Anfangspunkte selbst, $\eta = 2hg$ und zwar sowohl aus der einen, wie auch aus der anderen der beiden Gleichungen (87). Die Wellenhöhe hat daher von dem grösseren Betrage $(k+h)g$ zu dem kleineren $2hg$ abgenommen, wenn das Saitenstück auf der Halbaxe der positiven $x$ das stärkere ist, d. h. wenn $k > h$ besteht. Im entgegengesetzten Falle aber findet eine Zunahme der Wellenhöhe Statt. Auch die Länge der Welle ist eine andere geworden, sie ist nämlich nicht mehr $\frac{2\delta}{h}$, sondern $\frac{\delta}{h} + \frac{\delta}{k}$.

Lässt man jetzt die Zeit $t$ über $b$ hinauswachsen, so geht der erste Bestandtheil des Werthes von $\eta$ auf der Seite der negativen $x$, der bisher von der Null verschieden war, in Null über, weil die Variablen unter dem Functionszeichen $f$, nämlich $hx-t$ für alle $t > b + \frac{\delta}{h}$ und für negative $x$ zwischen die Grenzen $-\infty$ und $-b-\delta$ fällt, zwischen welchen die Function $f$ selbst nur Nullwerthe hat. Wir erhalten also für $x < 0$ und für $t > b + \frac{\delta}{h}$

$$\eta = -(k-h)f(-hx-t). \tag{90}$$

Dieses $\eta$ stellt bereits die reflectirte Welle dar, deren Höhe offenbar $-(k-h)g$, die Länge aber $\frac{2\delta}{h}$ ist. Die Höhe ist eine negative, wenn die der einfallenden Welle positiv war, und umgekehrt, mithin ist die reflectirte Welle der einfallenden der Lage nach entgegengesetzt und besitzt mit dieser zwar einerlei Länge, aber eine im Verhältnisse von $k+h$ zu $k-h$ geringere absolute Höhe. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn $k > h$ ist, d. h. wenn die Bewegung aus der schwächeren Abtheilung des Fadens in die stärkere übertritt, wo dann auch die gebrochene Welle niedriger ist als die einfallende. Findet jedoch das Entgegengesetzte Statt, d. h. ist $h > k$, so hat die einfallende und reflectirte Welle einerlei Lage, während zugleich die einfallende von der gebrochenen an Höhe übertroffen wird. Das Maximum dieses $\eta$ findet Statt für $-hx-t=-b$, also für $x=\frac{b-t}{h}$. Dieses Maximum bewegt sich mithin beim Wachsen der Zeit und zwar mit der Geschwindigkeit $-\frac{1}{h}$, d. h. retrograd gegen das negative Ende der Abscissenaxe zu. Zugleich ist aber Bewegung über den Coordinaten-anfangspunkt auf die Seite der positiven Coordinaten $x$ hinübergetreten und man hat auf dieser Seite vom Augenblicke an, wo $t > b - \frac{\delta}{h}$ wird, ein von Null verschiedenes $\eta$. Sein Maximum findet Statt für $kx - t = -b$, also $x = \frac{t-b}{k}$. Dieses Maximum verändert also seinen Ort mit der Zeit und schreitet namentlich mit der positiven Geschwindigkeit $\frac{1}{k}$, also in der Richtung gegen das positive Ende der Abscissenaxe fort, und der Werth von $\eta$ stellt die gebrochene Welle dar mit der Höhe $2hg$ und der Länge $\frac{2\delta}{k}$.

Anstatt von der Voraussetzung einer anfänglichen Ausbiegung, wie wir gegenwärtig gethan haben, auszugehen, hätten wir auch einen anfänglichen Impuls annehmen können. d. h. wir hätten einem Theile der Saite im Momente $t = 0$ eine gewisse Geschwindigkeit verleihen können, ausgedrückt durch eine stetige Function von $x$. Die Erscheinungen, zu welchen diese veränderte Annahme führt, sind den eben betrachteten völlig congruent. Wir können daher von ihrer Discussion vor der Hand abgehen, indem wir uns vornehmen, später darauf zurück zu kommen.

Wäre die Saite nicht aus zwei Stücken von ungleicher Stärke, sondern aus mehreren solchen, z. B. aus dreien zusammengefügt, so liessen sich für diesen Fall die complicirteren Erscheinungen der Brechung und Reflexion der Wellen aus dem Gesagten nach einiger Überlegung immer ableiten, z. B. wenn sich von $x = -\infty$ bis $x = 0$ eine schwächere Saite mit der Masse $m$ ihrer Längeneinheit ausdehnte, darauf ein stärkeres Stück mit der Masse $M$ von $x = 0$ bis $x = a$ folgte, und endlich von $x = a$ bis $x = +\infty$ wieder eine schwächere Saite von der Masse $m$ vorhanden wäre, so erhielte man: $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{h}$ als Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in diesen drei Saitenstücken; die Wellenlängen in denselben sind $\frac{2\delta}{h}$, $\frac{2\delta}{k}$, $\frac{2\delta}{h}$. Am Punkte $x = 0$ findet eine erste Reflexion Statt und die Höhen der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Welle stehen zu einander im Verhältnisse der drei Grössen: $k + h$, $h - k$. $2h$. Ist also die angenommene Höhe der auf der Seite der negativen $x$ erregten Welle $G$, so sind die in Rede stehenden drei Wellenhöhen beziehlich $G, -\frac{k-h}{k+h}G$, $\frac{2h}{k+h}G$. Von ihnen verschwindet die erste nach der Reflexion ganz und gar und hat sich verwandelt in die beiden übrigen, die zweite geht in der Richtung der negativen $x$ fortan ungeändert mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ ins Unendliche; die dritte schreitet gegen den Punkt $x = a$ zu, an welchem abermals zwei ungleich starke Fadenstücke an einander stossen. Hier findet eine zweite Reflexion Statt, mithin eine abermalige Theilung der Welle in deren zwei, die Höhen stehen jetzt im Verhältnisse der drei Grössen $k + h$, $k - h$, $2k$ zu einander. Diese Höhen sind also: $\frac{2h}{k+h}G$, $\frac{2h(k-h)}{(k+h)^2}G$, $\frac{4kh}{(k+h)^2}G$. Von diesen drei Wellen verschwindet wieder die erste ganz und gar nach der Reflexion, die dritte geht fortan ungeändert in der positiven Richtung ins Unendliche; die zweite aber kehrt zu dem Anfangspunkte der Coordinaten zurück, um dort eine abermalige Reflexion und Theilung in zwei verschiedene Wellen zu erfahren. Die Höhen dieser letzteren sind: $\frac{4hk(k-h)}{(k+h)^3}G$, $\frac{2h(k-h)^2}{(k+h)^3}G$. Die erste von ihnen bewegt sich in der negativen Richtung, ohne eine fernere Veränderung zu erleiden, so zwar, dass anjetzt in dieser negativen Richtung der Bewegung und in dem ersten Fadenstücke zwei verschiedene Wellen vorhanden sind, deren Höhen beziehlich

$$-\frac{k-h}{k+h}G \quad . \quad \frac{4hk(k-h)}{(k+h)^3}G$$

sind; die andere reflectirte nähert sich abermals dem Punkte $x = a$, um alldort eine abermalige Reflexion zu erleiden und zerlegt zu werden in zwei, deren Höhen sind:

$$\frac{4kh(k-h)^2}{(k+h)^4}\,G \quad , \quad \frac{2h(k-h)^3}{(k+h)^4}\,G.$$

Von ihnen ist wieder die erste die gebrochene und bewegt sich im dritten Fadenstücke ohne eine fernere Veränderung zu erfahren, so zwar, dass alldort jetzt bereits zwei verschiedene Wellen in positiver Richtung und mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ einander nacheilen. Ihre Höhen sind beziehlich:

$$\frac{4kh}{(k+h)^2}\,G \quad \text{und} \quad \frac{4kh(k-h)^2}{(k+h)^4}\,G.$$

Um den räumlichen Abstand zwischen den höchsten Punkten dieser einander verfolgenden Wellen zu bestimmen, bedenke man, dass die im mittleren Fadenstücke vorhandene Welle, bis sie entweder nach der positiven oder nach der negativen Seite eine neue gebrochene liefern kann, die ihren Vorgängerinen nachschreitet, jedesmal das mittlere Fadenstück von der Länge $a$ zweimal durchlaufen, mithin einen Raum $2a$ zurückzulegen hat. Da dies mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{k}$ geschieht, so ist dazu die Zeit $2ak$ erforderlich. In dieser Zeit beschreibt aber im ersten und dritten Fadenstücke, wo die Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ ist, jede Welle den Raum $\frac{2ak}{h}$. Es ist also $\frac{2ak}{h}$ der Abstand zwischen den höchsten Punkten zweier nächster einander nachfolgender Wellen in dem ersten und dritten Fadenstücke.

Setzt man diese Betrachtungen in derselben Weise fort, so ergibt sich über den Verlauf der Erscheinung Folgendes: Erstens in der mittleren stärkeren Abtheilung der schwingenden Saite befindet sich immer nur eine abwechselnd hin- und hergehende Welle. Ihre Höhe nimmt nach jeder Reflexion ab und ihre Lage bleibt immer dieselbe. Die verschiedenen Höhen nach den verschiedenen Reflexionen bilden die folgende geometrische Reihe:

$$(91) \qquad \frac{2h}{k+h}\,G \quad , \quad \frac{2h(k-h)}{(k+h)^2}\,G \quad , \quad \frac{2h(k-h)^2}{(k+h)^3}\,G \quad , \quad \frac{2h(k-h)^3}{(k+h)^4}\,G \; , \ldots .$$

Zweitens, in dem ersten, auf der Seite der negativen $x$ liegenden Fadenstücke folgen sich im constanten Abstande $\frac{2ak}{h}$ Wellen in unbegrenzter Anzahl. Den Zug eröffnet eine verkehrte, die ihr nacheilenden hingegen sind alle aufrecht. Die stets abnehmenden Höhen dieser Wellen sind der Reihe nach:

$$(92) \qquad -\frac{k-h}{k+h}\,G \quad , \quad \frac{4hk(k-h)}{(k+h)^3}\,G \quad , \quad \frac{4hk(k-h)^3}{(k+h)^5}\,G \ldots .$$

Drittens, in der dritten Abtheilung des Fadens bewegen sich in positiver Richtung und in demselben Abstande $\frac{2ak}{h}$ und mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ Wellen ebenfalls in unbegrenzter Anzahl, deren Höhen sind:

$$(93) \qquad \frac{4hk}{(k+h)^2}\,G \quad , \quad \frac{4hk(k-h)^2}{(k+h)^4}\,G \quad , \quad \frac{4hk(k-h)^4}{(k+h)^6}\,G \; , \ldots .$$

Die Bewegung erlischt allmählich in der Nähe des Anfangspunktes der Coordinaten und trägt sich zu beiden Seiten auf immer entferntere Stellen über.

Wir haben zwar bisher bei der Aufstellung der die Wellen darstellenden Reihen (91), (92), (93) immer den Fall vor Augen gehabt, wo $k > h$ ist, wo mithin die überwiegende Masse auf das mittlere Fadenstück fällt, allein diese Reihen gelten offenbar auch für den entgegengesetzten Fall, wo $k < h$ besteht und mit welchem die in der Natur stattfindenden Bewegungen dieser Art eine grössere Analogie zu haben scheinen. In der That, wenn man einer Saite an einem Toninstrumente, oder einem Seile, einer Kette u. s. w. ein paar feste Punkte geben will, so setzt man dieselbe an diesen zu befestigenden Stellen jedesmal mit grösseren und desshalb unbeweglicheren Massen in Verbindung. Hiedurch werden die Befestigungspunkte nicht absolut, sondern nur relativ fest und das zwischen ihnen schwingende Stück des materiellen Systemes ist genöthigt, die ihm mitgetheilte Bewegung allmählich auf die dasselbe begrenzenden Massen zu übertragen, beiläufig nach denselben Gesetzen, nach welchen die Schwingungen eines schwachen Saitenstückes, das sich von $x = 0$ bis $x = a$ ausdehnt und das zu beiden Seiten in viel stärkere Saitenstücke übergeht, von dem ersteren auf die letzteren übertragen werden. Unsere Reihen (91), (92) und (93) gelten auch für diesen Fall, nur hat man sich jetzt in ihnen $h$ als der Grösse nach das $k$ bei weitem übertreffend vorzustellen. Folgende veränderte Umstände der Bewegung sind von dieser Vorstellungsweise das Ergebniss. Die erste Reihe (91), die die Wellenhöhen im Mittelstücke angibt, bekömmt wechselnde Zeichen ihrer Glieder und einen sehr geringen Grad der Convergenz, weil ihr Exponent $\frac{k-h}{k+h}$ wenig von der negativen Einheit verschieden ist, d. h. die Welle kehrt sich bei jeder Reflexion um und verliert dadurch jedesmal nur sehr wenig von ihrer absoluten Höhe. Die Bewegung erhält sich also dort desto länger, je grösser $h$ gegen $k$ angenommen wird, d. h. je grösser die Massen derjenigen Fadenstücke ausfallen, zwischen welchen das schwächere eingeschlossen ist. Wird $h$ unendlich gegen $k$ angenommen, so besteht in diesem mittleren Fadenstücke die Bewegung ungeschwächt bis ins Unendliche und es wird davon gar nichts an die Umgebung übertragen. In den beiden andern Reihen besitzen alle Glieder mit Ausnahme des ersten derselben in der zweiten Reihe (92) übereinstimmende Zeichen. Dies besagt, dass nach der einen Seite die aufrechten, nach der anderen Seite aber die umgekehrten Wellen alle abgeliefert werden. All' diese Ergebnisse stimmen so sehr mit der Erfahrung und mit den Folgerungen eines auf populäre Prämissen gegründeten Nachdenkens zusammen, dass man sie für eine Bestätigung dieser Theorie halten könnte, wenn überhaupt eine Theorie, die sich auf keine erst eines Beweises bedürftige Hypothese stützt, die vielmehr von einer solchen gänzlich frei gehalten worden ist, noch einer Bestätigung bedürfte. Hinzugefügt mag noch werden, dass die Wellenhöhen Maximum in den einfallenden und reflectirten Wellen hier in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie in der Theorie des Lichtes. Diese Höhen sind nämlich $G$ und $G' = -\frac{k-h}{k+h} G$. Nimmt man nun an, das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$, d. h. der Bruch $\frac{k}{h}$ werde mit $n$ bezeichnet, so wie in der Theorie des Lichtes, wo es den Namen Brechungsindex trägt, so ist auch:

$$G' = -\frac{n-1}{n+1} G. \tag{94}$$

Könnte man nun auch bei den Schwingungen gespannter Saiten, so wie in der Lichtlehre, die Bewegungsintensität dem Quadrate der Wellenhöhe proportional annehmen, was übrigens hier keinen präcisen Sinn zu haben scheint, und desshalb auch nicht recht zulässig sein dürfte, so hätte man:

$$\frac{G'^2}{G^2} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \tag{95}$$

genau dieselbe Formel, die für die Reflexion der Lichtwellen bei senkrechter Incidenz bekannt ist.

Die Integralformel, der wir diese Aufschlüsse über die Natur der schwingenden Bewegung entnommen haben, enthält noch nicht die allgemeinste Lösung der Aufgabe, denn man gewahrt in ihr nur eine einzige willkürliche Function $f$, während bekanntermassen jede partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen nur zwei unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen ein allgemeines Integral mit zwei willkürlichen Functionen bestimmter Grundgrössen zulässt. Man kann aber den Integralausdruck durch Hinzufügen einer neuen willkürlichen Functionsform zu vervollständigen suchen, indem man von der Voraussetzung eines anfänglichen, dem Zeitmomente $t=0$ entsprechenden Impulses ausgeht und dann die Wirkung dieses Impulses, ausgedrückt durch das ihm angehörige $\eta$, zu jener der Ausbiegung, d. h. zu dem $\eta$ der Formeln (87) hinzufügt. Zu diesem Behufe nehme man die elementaren, annoch trigonometrischen Ausdrücke (83), (84) für $\eta$ wieder vor und differentiire sie nach $t$, so ergibt sich:

$$(96)\quad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{A}\,\alpha\left[(k-h)\cos\alpha(hx+t) - (h+k)\cos\alpha(hx-t)\right] \\ &\text{für } x>0 \quad \frac{d\eta}{dt} = -2h\alpha\mathfrak{A}\cos\alpha(kx-t) \end{aligned}$$

oder

$$(97)\quad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{B}\,\alpha\left[(k+h)\sin\alpha(hx-t) - (h-k)\sin\alpha(hx+t)\right] \\ &\text{für } x>0 \quad \frac{d\eta}{dt} = 2h\alpha\mathfrak{B}\sin\alpha(kx-t). \end{aligned}$$

Nun erwähle man anstatt der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die folgenden Functionen von $\alpha$ und von einer neuen Grösse $\rho$:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\alpha\pi}\cos\alpha\rho\, F(\rho) \quad , \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\alpha\pi}\sin\alpha\rho\, F(\rho), \tag{98}$$

multiplicire sodann die vier so erhaltenen Ausdrücke mit dem Differentialfactor $d\alpha d\rho$ und addire sie zu zweien, die für die negativen $x$ bestehenden zusammen und die für positive $x$ giltigen ebenfalls in ein Aggregat zusammennehmend, hierauf integrire man noch nach $\alpha$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$, nach $\rho$ aber zwischen $-\infty$ und $\infty$. Das sich auf solche Weise ergebende Paar von Formeln für $\eta$ ist:

$$(99)\quad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(k-h)\cos\alpha(hx+t-\rho) - (k+h)\cos\alpha(-hx+t-\rho)\right]F(\rho)\,d\alpha\,d\rho \\ &\text{für } x>0 \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} 2h\cos\alpha(-kx+t-\rho)\,F(\rho)\,d\alpha\,d\rho \end{aligned}$$

oder nach der bekannten Formel Fourier's:

$$(100)\qquad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \frac{d\eta}{dt}=(k-h)F(hx+t)-(k+h)F(-hx+t)\\ &\text{für } x>0 \quad \frac{d\eta}{dt}=-2hF(-kx+t). \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann durch Integration nach $t$:

$$(101)\qquad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \eta=\int[(k-h)F(hx+t)-(k+h)F(-hx+t)]dt+\varphi(x)\\ &\text{für } x>0 \quad \eta=-\int 2hF(-kx+t)dt+\psi(x). \end{aligned}$$

Macht man nun in Bezug auf die anfängliche Geschwindigkeit, d. h. auf den Werth $\frac{d\eta}{dt}$ im Momente $t=0$ die ähnlichen Voraussetzungen wie in Bezug auf die anfängliche Ausbiegung, d. h., dass von $x=\infty$ bis zu $x=-b-\delta$ diese Geschwindigkeit gleich Null sei, von $x=-b-\delta$ bis $x=-b+\delta$ von Null verschieden und von $x=-b+\delta$ bis $x=+\infty$ wieder gleich Null, so zeigt sich vermöge der Werthe, die $\frac{d\eta}{dt}$ im Momente $t=0$ nach unseren Formeln (100) annimmt, nämlich:

$$(102)\qquad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \frac{d\eta}{dt}=(k-h)F(hx)-(k+h)F(-hx)\\ &\text{für } x>0 \quad \frac{d\eta}{dt}=-2hF(-kx) \end{aligned}$$

dass für's erste $F(-kx)$ Null sein müsse für alle positiven Werthe von $x$, mithin hat überhaupt die Function $F$ die Eigenschaft Null zu sein für alle negativen Werthe der darin vorhandenen Variabeln. Hiedurch zieht sich auch der erste für negative $x$ geltende der vorliegenden zwei Ausdrücke für $\frac{d\eta}{dt}$ auf einen monomischen zurück, nämlich:

$$(103)\qquad \frac{d\eta}{dt}=-(k+h)F(-hx)$$

und man sieht, dass die Function $F$ noch überdem die Eigenschaft besitzen muss, zu verschwinden von $-hx=-\infty$ bis zu $-hx=-b-\delta$, d. h. von $x=\frac{b+\delta}{h}$ bis $x=\infty$; von der Null verschieden ist sie dann im Intervalle von $x=\frac{b-\delta}{h}$ bis $x=\frac{b+\delta}{h}$; für die anderen positiven Werthe von $x$, nämlich von $x=0$ bis $x=\frac{b-\delta}{h}$, muss sie abermals der Null gleichen. Dies gilt von der Function $F(x)$; es gilt aber offenbar auch für jede, wie immer anders benannte Variable anstatt $x$ unter dem Functionszeichen $F$.

Kehren wir jetzt zu den Formeln (101), gewonnen für $\eta$, zurück. Sie enthalten in sich zwei annoch unbestimmte reine Functionen von $x$ ohne $t$, die hier die Rolle der Integrationsconstanten spielen. Zu ihrer Bestimmung braucht man nur zu bemerken, dass im Momente $t=0$ eine Ausbiegung an einem Theile der Saite angenommen worden sei, beschränkt auf die negative Seite der Coordinaten und ausgedrückt durch die Formel (87). Da kraft derselben nur für negative $x$

$$\eta=(k+h)f(hx)$$

besteht; so wird man $\varphi(x)=(k+h)f(hx)$ und $\psi(x)=0$ annehmend die in der Formel (101) vorhandenen Integrationen nach $t$ zwischen den Grenzen 0 und $t$ durchgeführt, d. h. die Integrale für $t=0$ verschwindend denken können. Allein es wird eben so gut gestattet sein,

$\varphi(x) = \psi(x) = 0$ zu setzen, weil dies nichts anderes heisst, als gar keine anfängliche Ausbiegung und nur einen initialen Impuls zu statuiren, nur wird man dann wieder nur eine particuläre Auflösung der partiellen Differentialgleichung mit einer einzigen willkürlichen Function gewinnen, aber eine von den früher erhaltenen verschiedene. Durch Aggregiren der beiden so gewonnenen wird man sich dann abermals die allgemeine zusammenstellen können. Es wäre also allgemein für $x < 0$

$$(104) \qquad \eta = (k - h)\int_0^t F(hx + t)\,dt - (k + h)\int_0^t F(-hx + t)\,dt + (k + h) f(hx)$$

und für $x > 0$

$$(104) \qquad \eta = -2h\int_0^t F(-kx + t)\,dt\,.$$

Nehmen wir jetzt an, dass $\int F(u)\,du = \mathrm{F}(u)$ sei, so lassen sich die beiden Werthe von $\eta$ auf folgende Weise aufzeichnen:

$$(105) \quad \begin{cases} \text{für } x < 0 & \eta = (k - h)[\mathrm{F}(hx + t) - \mathrm{F}(hx)] - (k + h)[\mathrm{F}(-hx + t) - \mathrm{F}(-hx)] + (k + h) f(hx) \\ \text{für } x > 0 & \eta = -2h[\mathrm{F}(-kx + t) - \mathrm{F}(-kx)] \end{cases}$$

und dies sind Integralausdrücke mit zwei willkürlichen Functionen bestimmter Grundgrössen.

Dass man auf diese Weise die allgemeine Auflösung verfehlt, darf Niemanden befremden, denn wir haben sie zusammengesetzt aus lauter solchen besonderen Bewegungen, die auf der Seite der positiven $x$ nur einen einzigen progressiven und auf der Seite der negativen $x$ zwei Wellenzüge bieten, von denen der eine ein progressiver, der andere ein regressiver ist, und es steht wohl kaum zu erwarten, dass aus solchen speciellen elementaren Bewegungen durch Übereinanderlegen vermittelst Integration alle möglichen Schwingungsweisen zusammengesetzt werden können, deren das lineare System fähig ist und die den verschiedensten Arten anfänglicher Erregung entsprechen. Wer mit der Theorie der Schwingungen vollständig vertraut ist, und weiss, dass in einer Saite von allerwärts gleicher Dicke eine ertheilte anfängliche Ausbiegung ohne Impuls sich bei dem Wachsen der Zeit $t$ allsogleich in zwei solche theilt, deren jeder nur die halbe Höhe der ursprünglichen zukömmt, und die sich dann nach entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen mit einerlei Geschwindigkeit, wird auch bei der aus heterogenen Theilen zusammengesetzten Saite eine ähnliche Erscheinung als Rechnungsresultat erwarten. Auch hier soll also die auf der Seite der negativen Coordinaten $x$ vorausgesetzte anfängliche Ausbiegung vor allem anderen zerlegt werden in zwei Wellen, von welchen die eine dem Anfangspunkte der Coordinaten zuschreitet, die andere aber dem negativen Ende der Abscissenaxe. Diese zweite fehlt hier gänzlich und ist nirgends in den Formeln, die wir kennen gelernt haben, enthalten, Beweis genug, dass in denselben die allgemeinste Auflösung des Problemes in Form von willkürlichen Functionen bestimmter Grundgrössen nicht zu suchen sei, sondern nur eine speciellere, die ihrer Entstehungsweise nach in populärer Ausdrucksweise vielleicht so formulirt werden könnte: Die einfallende Welle kömmt unbestimmt woher, aber jedenfalls so erregt, dass sowohl anfänglich Ausbiegung, wie auch Impuls bei der Erzeugung in einer solchen Weise concurriren, dass dadurch die regressive

Welle aufgehoben ist, und nur für die progressive gibt die erhaltene Formel die Gesetze der Fortpflanzung und Reflexion.

Man kann sich aber dennoch die allgemeinste mit zwei willkürlichen Functionen bestimmter Grundgrössen ausgerüstete Integralformel verschaffen, wenn man nicht von den elementarsten Formeln (83) und (84) ausgeht, die nur von drei Wellenzügen sprechen, sondern von den anderen (75) und (76), die annoch von acht solchen, vier Wellenzüge nämlich auf der Seite der positiven Coordinaten $x$ und eben so vielen auf der entgegengesetzten Seite, Zeugniss geben. Der hiezu dienliche Schritt der Rechnung ist der folgende: Man gebe den willkürlichen Integrationsconstanten $K$ und $J$ die durch die folgenden zwei Gleichungen bestimmten Formen:

$$(106) \qquad \frac{K}{2ahk^2} = \frac{f(\rho)}{2\pi} \quad , \quad \frac{KJ}{2ahk^2} = \frac{F(\rho)}{2\pi}$$

und wähle hiezu ein erstes Mal

$$A = \cos a.\rho \quad , \quad B = \sin a.\rho,$$

sodann aber auch umgekehrt

$$A = \sin a.\rho \quad , \quad B = \cos a.\rho,$$

multiplicire ferner die auf diese Weise aus den Formeln (75) und (76) hervorgehenden Werthe für $\eta$ mit dem Differentialfactor $da\,d\rho$ und integrire sie sodann nach $a$ sowohl, wie auch nach $\rho$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. Der Vergleich mit der bekannten Fourier'schen Formel leitet dann zu den folgenden Ausdrücken, die ebenfalls die Eigenschaft haben müssen, die Differentialgleichung in $\eta$ zu erfüllen. Sie sind für negative $x$:

$$(107) \qquad \eta = kf(hx+t) + kf(-hx+t) + kF(hx-t) - kF(-hx-t)$$

und für $x > 0$

$$(108) \qquad \eta = kf(kx+t) + kf(-kx+t) + hF(kx-t) - hF(-kx-t)$$

und dies ist wirklich die allgemeinste Integralformel, die nicht nur die frühere, durch die (87) dargestellte specielle Auflösung, sondern auch die erwartete, von welcher eben die Rede war, als besondere Fälle in sich enthält. Namentlich erhält man die erstere von ihnen, indem man zwischen den Functionen $f(x)$ und $F(x)$ diejenige Verwandtschaft annimmt, welche durch die Gleichung:

$$(109) \qquad kf(x) = hF(-x)$$

ausgedrückt ist und zwar für beliebige $x$. Dadurch verwandelt sich nämlich unsere Integralformel in die folgende:

$$(110) \qquad \begin{array}{ll} \text{für } x < 0 & \eta = (h+k)F(hx-t) - (k-h)F(-hx-t) \\ \text{für } x > 0 & \eta = 2hF(kx-t). \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar von dem unter (87) vorhandenen nicht verschieden. Allein man kann sich auch eine Auflösung anderer Art aufstellen, wenn man $f(x)$ und $F(x)$ in die folgende verwandte Beziehung stellt, die auch für beliebige $x$ zu gelten hat:

$$(111) \qquad kf(x) = -hF(-x).$$

Die allgemeine Integralformel geht hiedurch über in:

$$(112)\qquad \begin{array}{ll} \text{für } x<0 & \eta=-(h+k)F(-hx-t)-(h-k)F(hx-t) \\ \text{für } x>0 & \eta=-2hF(-kx-t). \end{array}$$

Dies ist offenbar etwas von dem Früheren Verschiedenes und man kann nicht nur eines für sich und das andere ebenfalls für sich als Auflösung des Schwingungsproblemes ansehen für übereinstimmende sowohl, wie auch für verschiedene Functionsformen anstatt $F(x)$ gesetzt, sondern man kann sie auch aggregiren, nachdem man in irgend einer dieser Formeln das Functionszeichen $F$ in ein anderes, etwa $-f$ verwandelt hat. Man hat mithin auch:

$$(113)\qquad \begin{array}{ll} \text{für } x<0 & \eta=(h+k)[f(-hx-t)+F(hx-t)]-(k-h)[f(hx-t)+F(-hx-t)] \\ \text{für } x>0 & \eta=2h[f(-kx-t)+F(kx-t)] \end{array}$$

und diese ist die Formel, die nicht nur die erwartete obenerwähnte Auflösung in sich enthält als speciellen Fall, sondern auch noch unzählige andere, davon verschiedene; namentlich erhält man die erwartete, indem man die beiden Functionen $f$ und $F$ in der folgenden Verwandtschaft zu einander stehend betrachtet:

$$(114)\qquad F(x)=f(-x).$$

Dadurch ergibt sich nämlich

$$(115)\qquad \begin{array}{ll} \text{für } x<0 & \eta=(h+k)[F(hx+t)+F(hx-t)]-(k-h)[F(-hx+t)+F(-hx-t)] \\ \text{für } x>0 & \eta=2h[F(kx+t)+F(kx-t)]. \end{array}$$

Differentiirt man diese Formel nach $t$, so ergibt sich der Werth der Geschwindigkeit:

$$(116)\qquad \begin{array}{ll} \text{für } x<0 & \frac{d\eta}{dt}=(h+k)[F'(hx+t)-F'(hx-t)]-(k-h)[F'(-hx+t)-F'(-hx-t)] \\ \text{für } x>0 & \frac{d\eta}{dt}=2h[F'(kx+t)-F'(kx-t)] \end{array}$$

und in dem besonderen Zeitmomente $t=0$

$$(117)\qquad \begin{array}{ll} \text{für } x<0 & \eta=2(h+k)F(hx)-2(k-h)F(-hx)\quad,\quad \frac{d\eta}{dt}=0 \\ \text{für } x>0 & \eta=4hF(kx)\quad,\quad \frac{d\eta}{dt}=0. \end{array}$$

Da hier zu beiden Seiten $\frac{d\eta}{dt}=0$ ausgefallen ist, so gibt es keine Anfangsgeschwindigkeit als Erregungsmittel. Nimmt man zudem an, parallel mit den früher gemachten Voraussetzungen, dass eine anfängliche Ausbiegung nur auf die Seite der negativen $x$ falle mit dem Maximum bei $x=-b$, so hat offenbar die Function $F$ die Eigenschaft, für alle positiven Werthe ihrer Variablen zu verschwinden. Der anfängliche Werth von $\eta$ auf der Seite der negativen $x$ reducirt sich hiemit auf das erste Glied und bietet ein Maximum $2(h+k)g$, unter $g$ den grössten Werth verstanden, den die Function $F$ anzunehmen fähig ist.

Bei dem Wachsen der Zeit $t$ erhält die Variable unter einem der Functionszeichen $F$, nämlich $-hx+t$ auf der Seite der negativen $x$ offenbar nur lauter positive Werthe, mithin die Function selbst nur lauter verschwindende. In gleicher Weise auf der entgegengesetzten Seite die Variable $hx+t$ auch wieder nur positive Werthe, was abermals der Function $F$

den beständigen Werth Null ertheilt. Man hat also für beliebige positive $t$ unter solchen Voraussetzungen den nachstehenden einfachen Werth für $\eta$:

$$(118)\quad \begin{array}{ll} \text{für } x < 0 & \eta = (k+h)[F(hx+t) + F(hx-t)] - (k-h)F(-hx-t) \\ \text{für } x > 0 & \eta = 2hF(kx-t). \end{array}$$

Die drei Bestandtheile, aus welchen der erste dieser beiden Werthe von $\eta$ zusammengefügt ist, besitzen ihre Maxima bezüglich für:

$$hx + t = -b \quad , \quad hx - t = -b \quad , \quad -hx - t = -b$$

mithin für:

$$(119)\qquad x = \frac{-b-t}{h} \quad , \quad x = \frac{t-b}{h} \quad ; \quad x = \frac{b-t}{h}.$$

Von diesen drei Werthen des $x$ ist für kleinere $t$ einstweilen noch der dritte gänzlich wegzulassen, weil er kein negatives $x$ gibt, wie die Natur der Formel verlangt. Die beiden anderen beurkunden aber eine Zerlegung der ursprünglichen Ausbiegung in zwei Wellen, von welchen die erste mit der Geschwindigkeit $-\frac{1}{h}$, die zweite aber mit der Geschwindigkeit $+\frac{1}{h}$ längs der Saite vorrücken, und von denen offenbar eine jede nach gehörig erfolgter Trennung die Höhe $(k+h)\,g$ haben wird, was genau die Hälfte der ursprünglichen Wellenhöhe ist.

Wird $t > b$, so geht der zweite der obangeführten Abscissenwerthe (119) in einen positiven über. Diese Welle also, die progressive von den beiden eben erwähnten verschwindet und es taucht eine reflectirte und eine gebrochene an ihrer Stelle auf. Die erstere ist retrograd und hat, wie man sieht, die Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$, die andere besitzt ihr Maximum an dem Orte

$$kx - t = -b \quad \text{mithin} \quad x = \frac{t-b}{k}$$

bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{k}$. Diesen zwei Wellen gehören die Höhen:

$$-(k-h)\,g \quad \text{und} \quad 2hg.$$

Es ist klar, dass dies diejenigen Erscheinungen sind, welche jeder mit der Schwingungstheorie gespannter Saiten Vertraute erwartet bei der Abwesenheit eines anfänglichen Impulses. Diese etwas detaillirteren Analysen des erhaltenen Integrales schienen nothwendig, um zu zeigen, dass bei solchen Rechnungen einige Vorsicht nothwendig sei, damit man das allgemeine Integral nicht verfehle und vielleicht eine particuläre Auflösung dafür erhalte.

Kehren wir jetzt zu der früher schon gemachten Voraussetzung einer beiderseits beschränkten Saitenlänge zurück, indem wir zwei feste Punkte, den einen für $x = -l$, den anderen für $x = \lambda$ statuiren. Es ist hiezu nothwendig, anstatt der an die Stelle des Bruches $\frac{\cos ahl}{\sin ahl}$ eingeführten Constanten $J$ eben diese gebrochene trigonometrische Function wieder zurückzusetzen. Der Werth von $y$, der sich dadurch aus der Formel (72) ergibt, nimmt dann bereits Rücksicht auf den festen Punkt $x = -l$, setzt positive $x$ voraus und hat die folgende Gestalt:

$$y = + \frac{K}{2\alpha h k^2} \sin(\alpha k x) \left\{ h \frac{\cos \alpha h l}{\sin \alpha h l} + k \frac{\cos \alpha k x}{\sin \alpha k x} \right\} =$$

(120) $$= \frac{K}{2\alpha h k^2} \left\{ k \cos \alpha k x + h \frac{\cos \alpha h l}{\sin \alpha h l} \sin \alpha k x \right\} =$$

$$= \frac{K}{2\alpha h k^2 \sin(\alpha h l)} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(k+h) \sin[\alpha(kx+hl)] - \\ - \tfrac{1}{2}(k-h) \sin[\alpha(kx-hl)] \end{array} \right\}.$$

Diese Formel gilt von $x = 0$ bis $x = \infty$, mithin für ein nur nach der Seite der positiven $x$ unbegrenztes Fadenstück. Will man es im Punkte $x = \lambda$ endigen lassen, so hat man noch das Verschwinden für $x = \lambda$ zu veranstalten. Hiezu ist aber die Constante $K$ unbrauchbar, mithin ist man genöthigt, wie in anderen Schwingungsproblemen dieser Art, das ursprünglich gewählte $\alpha$ zu diesem Zwecke zu verwenden, dasselbe mithin so zu wählen, dass

$$k \cos \alpha k \lambda + h \frac{\cos \alpha h l}{\sin \alpha h l} \sin \alpha k \lambda = 0$$

wird, oder was dasselbe ist:

(121) $$k \operatorname{cotang} \alpha k \lambda = - h \operatorname{cotang} \alpha h l.$$

Die Wurzeln dieser transcendenten Gleichung in aufsteigender Ordnung, von der kleinsten angefangen, seien:

$$\alpha_1 \quad , \quad \alpha_2 \quad , \quad \alpha_3 \, , \ldots \ldots$$

Es sind deren unendlich viele. Wir sind nun berechtigt, sie anstatt $\alpha$ der Reihe nach alle einzuführen in die Formel für $y$, jeden der auf diese Weise gewonnenen Ausdrücke mit dem Cosinus $\alpha t$ und auch mit Sinus $\alpha t$ durch Multiplication zu verbinden und noch überdies einem jeden der so erhaltenen Producte eine andere willkürliche Constante anzuhängen; so wird schliesslich auch die Summe aller dieser so gewonnenen Ausdrücke einen Werth von $\eta$ vorstellen, so dass man also ganz allgemein hat:

(122) $$\eta = \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \{ [A_r \cos \alpha_r t + B_r \sin \alpha_r t] \, 2k \sin[\alpha_r h (x + l)] \}$$

für negative Werthe von $x$. Die durch das Zeichen $S$ angedeutete Summirung bezieht sich auf die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ der obigen transcendenten Gleichung, und man kann sich auf die positiven beschränken, wenn man erwägt, dass die ebenfalls unter ihnen vorhandenen negativen keine der Form nach verschiedenen Glieder zum allgemeinen Integrale liefern, die man also mit anderen zusammenziehen kann. Für positive Werthe von $x$ hingegen hat man auf dieselbe Weise die folgende andere allgemeine Integralformel:

(123) $$\eta = \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \{ [A_r \cos \alpha_r t + B_r \sin \alpha_r t] [(k+h) \sin[\alpha_r (kx + hl)] - (k-h) \sin[\alpha_r (kx - hl)]] \}.$$

Die mit $A_r$ und $B_r$ bezeichneten Integrationsconstanten besitzen in beiderlei Formeln einerlei Werth und stehen annoch zur Verfügung, um den Bedingungen für $t = 0$, die die Art der ursprünglichen Erregung darstellen, Genüge zu leisten. Beide Formeln lassen sich noch durch Multiplication der in ihnen vorhandenen trigonometrischen Ausdrücke und Verwandlung der Producte von Sinus und Cosinus in Functionen der Summe und Differenz hinstellen, wie folgt:

$$(124)\quad \eta = \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \{ \mathfrak{a}_r \cos a_r (t + hx) + \mathfrak{b}_r \cos a_r (t - hx) + \mathfrak{c}_r \sin a_r (t + hx) + \mathfrak{d}_r \sin a_r (t - hx) \}$$

für negative $x$, und:

$$(124)\quad \eta = \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \{ \mathfrak{A}_r \cos a_r (t + kx) + \mathfrak{B}_r \cos a_r (t - kx) + \mathfrak{C}_r \sin a_r (t + kx) + \mathfrak{D}_r \sin a_r (t - kx) \}$$

für positive $x$ mit den folgenden Werthen der Constanten:

$$(125)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{a}_r &= A_r k \sin a_r h l - B_r k \cos a_r h l \\
\mathfrak{b}_r &= A_r k \sin a_r h l + B_r k \cos a_r h l \\
\mathfrak{c}_r &= B_r k \sin a_r h l + A_r k \cos a_r h l \\
\mathfrak{d}_r &= B_r k \sin a_r h l - A_r k \cos a_r h l \\
\mathfrak{A}_r &= A_r k \sin a_r h l - B_r h \cos a_r h l \\
\mathfrak{B}_r &= A_r k \sin a_r h l + B_r h \cos a_r h l \\
\mathfrak{C}_r &= B_r k \sin a_r h l + A_r h \cos a_r h l \\
\mathfrak{D}_r &= B_r k \sin a_r h l - A_r h \cos a_r h l.
\end{aligned}$$

Diese Formeln geben bereits über die Schwingungsweise eines solchen gespannten Fadens einige Aufschlüsse. Zuvörderst sieht man nämlich, dass in einem jeden Gliede der darin vorhandenen Summen Sinus und Cosinus vorkommen des Binomes $a_r(t \pm hx)$ oder $a_r(t \pm kx)$. Jeder derselben gewinnt wieder denselben Werth, wenn $a_r t$ gewachsen ist um $2\pi$, also wenn $t$ zugenommen hat um $\frac{2\pi}{a_r}$. Es ist daher in beiden Formen, d. h. in beiden Abtheilungen des Fadens, der schwächeren sowohl, wie auch in der stärkeren, einerlei Schwingungsdauer vorhanden. Nennt man sie also $\theta_r$ für diejenigen der elementaren Bewegungsweisen, der die $r^{\text{te}}$ Wurzel $a_r$ der transcendenten Gleichung (121) angehört, so besteht:

$$(126)\quad \theta_r = \frac{2\pi}{a_r}.$$

Ferner bleibt ein jeder binomische Ausdruck, wie $t \pm hx$ unter dem Zeichen Sinus oder Cosinus unverändert, wenn man zu gleicher Zeit $x$ in $x + \varDelta x$ und $t$ in $t + \varDelta t$ verwandelt, so jedoch, dass

$$(127)\quad \begin{gathered} \varDelta t \pm h \varDelta x = 0 \\ \text{mithin: } \varDelta x = \mp \frac{1}{h} \varDelta t \end{gathered}$$

wird. Man kann $\varDelta t$ als eine verflossene Zeit und $\varDelta x$ als die in derselben beschriebene Strecke ansehen, welche der Punkt $x$ durchmessen hat, dem einerlei Werth von $\sin a(t \pm hx)$ oder $\cos a(t \pm hx)$ angehört. Dann ist aber $\frac{1}{h}$ die Geschwindigkeit dieses Punktes mit dem Zeichen $+$ oder $-$ versehen, was der Richtung nach entgegengesetzte Bewegungen andeutet. Erwägt man zudem noch, dass der analytische Ausdruck jeder der elementaren Schwingungsweisen in der Formel (124) aus vier Gliedern zusammengefügt ist, so sieht man, dass man sich eine jede derselben zusammengesetzt denken kann aus vier Wellenzügen, von denen zwei, die nämlich mit dem $\sin\alpha(t-hx)$ und $\cos\alpha(t-hx)$ sich dem Anfangspunkte der Coordinaten nähern, während die beiden anderen mit $\sin\alpha(t+hx)$ und $\cos\alpha(t+hx)$ in der entgegengesetzten Richtung der Bewegung begriffen sind. Die Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ hat für alle elementaren Schwingungsweisen auf der Seite der negativen Coordinaten $x$ einerlei Werth, nämlich:

$$(128) \qquad \frac{1}{h}=\sqrt{\frac{S}{m}}.$$

In der anderen Formel (124), die für positive $x$ giltig ist, verhält sich die Sache eben so, nur tritt anstatt der Geschwindigkeit $\frac{1}{h}$ hier die andere $\frac{1}{k}$ auf, die man, weil:

$$(129) \qquad \frac{1}{k}=\sqrt{\frac{S}{M}}$$

ist, als die kleinere der beiden ansehen kann, weil $M>m$ angenommen wurde. Es verlangsamen sich also die Bewegungen in der stärkeren Hälfte des Fadens in dem Masse, in welchem die Quadratwurzel der Masse, oder was dasselbe ist, die Dicke des Fadens zunimmt, wenn man sich den ganzen Faden aus einerlei Stoff gewoben denkt.

Endlich sieht man, dass in der Formel (124) jede der trigonometrischen Functionen einerlei Werth wieder erhalten wird, wenn $\alpha_r hx$ zunimmt um $2\pi$, also $x$ wächst um $\frac{2\pi}{\alpha_r h}$. Mithin bedeutet:

$$(130) \qquad \omega_r=\frac{2\pi}{\alpha_r h}=\frac{2\pi}{\alpha_r}\sqrt{\frac{S}{m}}$$

die der $r^{\text{ten}}$ elementaren Bewegungsweise angehörige Wellenlänge in dem schwächeren Fadenstücke und genau auf dieselbe Weise:

$$(131) \qquad \Omega_r=\frac{2\pi}{\alpha_r k}=\frac{2\pi}{\alpha_r}\sqrt{\frac{S}{M}}$$

die augenscheinlich geringere Wellenlänge in der stärkeren Fadenhälfte. Die zu den sich fortwährend deckenden und durch einander hindurchsteigenden Wellen zugehörigen Schwingungsamplituden aber, nämlich:

$$\mathfrak{a}_r\ ,\ \mathfrak{b}_r\ ,\ \mathfrak{c}_r\ ,\ \mathfrak{d}_r\quad ,\quad \mathfrak{A}_r\ ,\ \mathfrak{B}_r\ ,\ \mathfrak{C}_r\ ,\ \mathfrak{D}_r$$

sind gegeben durch die Gleichungen (125). Da nun aber Wellenlänge sowohl, wie auch Schwingungsdauer abhängig sind von der Wurzel $\alpha_r$ der transcendenten Gleichung, so wird man eine genauere Kenntniss des ganzen Vorganges und namentlich der Töne, die ein solches, aus zwei heterogenen Bestandtheilen zusammengesetztes System von materiellen Punkten geben kann, nur dadurch gewinnen können, dass man zur Auflösung derselben schreitend, sich die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$ von der kleinsten angefangen, sich wirklich verschafft. Die kleinste $\alpha_1$ entspricht dann offenbar der grössten Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ und gibt den tiefsten

Ton, den eine solche Saite zu schwingen fähig ist. Die weiteren $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... $\alpha_r$ geben die rascheren Schwingungsweisen, beziehlich die höheren Töne. Wir wenden uns also zur Transcendenten (121) zurück und nehmen behufs der leichteren Übersicht über die unendlich vielen Wurzeln, die ihr entsprechen, in den verschiedenen Fällen, die der Mannigfaltigkeit der Werthe $h$, $k$, $l$, $\lambda$ angehören, zuvörderst den allereinfachsten unter ihnen vor, den nämlich, $hl = k\lambda$. Die transcendente Gleichung in $\alpha$ geht unter dieser speciellen Voraussetzung über in:

$$(k + h)\, cotang\, \alpha h l = 0 \tag{132}$$

oder, da $h + k$ nicht verschwinden kann,

$$cotang\, \alpha h l = 0. \tag{133}$$

Es wird ihr Genüge geleistet durch die folgenden Werthe des Bogens $\alpha h l$:

$$\alpha h l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \frac{(2r-1)\pi}{2} \ldots \tag{134}$$

Ihnen entsprechen die folgenden Werthe von $\alpha$ und von $\theta$, welches gleich $\frac{2\pi}{\alpha}$ ist und die Schwingungsdauer bedeutet:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2hl}, \frac{3\pi}{2hl}, \frac{5\pi}{2hl} \ldots \frac{(2r-1)\pi}{2hl} \ldots \\ \theta &= 4hl, \frac{4hl}{3}, \frac{4hl}{5}, \ldots \frac{4hl}{(2r-1)} \ldots \end{aligned} \tag{135}$$

Da diese Werthe von $\theta$ im Verhältnisse der reciproken Werthe der natürlichen Zahlen: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ zu einander stehen, so sind sie unter einander commensurabel und eine solche Saite vermag wirklich consonirende Töne ebenso zu schwingen, wie eine andere von durchaus gleicher Dicke. Da jedoch Töne, die im Schwingungsverhältnisse 1 : 2 zu einander stehen, hier gänzlich fehlen, so verweigert eine solche Saite, so scheint es wenigstens auf den ersten Blick, gerade die consonanteste aller Consonanzen, nämlich die Octave, d. h. welchen Ton sie auch immer schwingen mag, so gibt sie auch alle mit demselben consonirenden Töne, die Terz, die Quint u. s. w., nur die Octave ist ausgeschlossen.

An solchen besonderen Ergebnissen des Calculs bezweifelt man gewöhnlich die Richtigkeit und findet sich daher auch hier veranlasst, zu untersuchen, ob dieser Mangel der consonantesten aller Consonanzen wirklich in der Natur der Sache, oder lediglich in der Natur der Formeln begründet sei, die vielleicht die Eigenschaft haben, alle Schwingungsweisen des Systemes in den verschiedenen möglichen Fällen nicht darstellen zu können. Da uns dies bereits vorgekommen ist und da namentlich das gewisse unter (75), (76) gegebene viergliedrige particuläre Integral mit reellen Coëfficienten die einfachste und elementarste Schwingungsweise darzustellen nicht geeignet war, so ist man auch hier um so mehr berechtigt an den Mangel der Octaven zu zweifeln, wenn $hl = k\lambda$ besteht, als man allsogleich, wenn auch nicht die reine Octave doch wenigstens einen ihr nahe kommenden Ton auftreten sieht, wenn diese zwei Producte $hl$ und $k\lambda$ nämlich, wenn auch noch so wenig von einander verschieden ausfallen, und wirklich überzeugt man sich nach reiflicher Überlegung von dem Vorhandensein der Octaven. Sie sind aber nicht enthalten in dem allgemeineren Werthe von $y$, der unter (63) vorkömmt, und mit einem unbestimmten Integralzeichen ausgerüstet ist, sondern in dem früher gewonnenen Aggregate zweier Sinus, das ein particuläres Integral mit nur einer einzigen Constanten $H$ der Gleichung in $y$ darstellt, und unter (56) zu ersehen ist. Diese Formel gibt nämlich für $x < 0$:

$$y = -2kH \sin ahx \tag{136}$$

und für $x > 0$

$$y = -2hH \sin akx. \tag{136}$$

Es ist klar, dass auch diese Formeln eine mögliche Schwingungsweise des Systemes darstellen; auch kann man die Punkte $x = -l$ und $x = \lambda$ festmachen, ohne dadurch die Schwingungen, die durch diese Formeln dargestellt werden, aufzuheben, denn weil $hl = k\lambda$ vorausgesetzt ist, so bekommt man nur eine einzige Bedingungsgleichung, nämlich:

$$\sin ahl = 0 \tag{137}$$

die erfüllt sein muss, wenn die genannten beiden Punkte durch die ganze Dauer der Bewegung in Ruhe bleiben sollen. Dieser Gleichung aber entsprechen die folgenden Reihen von Werthen für $a$ und $\theta$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi}{hl}\,, \quad \frac{2\pi}{hl}\,, \quad \frac{3\pi}{hl}\,, \ldots \\ \theta &= 2hl\,, \quad hl\,, \quad \frac{2hl}{3}\,, \ldots \end{aligned} \tag{138}$$

Hier hätte man also die Octaven auch, nur sind sie nicht gegeben durch die allgemeineren Formeln, sondern die einfacheren (136), die hinwiederum nur für den Fall $hl = k\lambda$ und noch dazu für eine Reihe denselben gleichgeltender Fälle, also jedenfalls für specielle Fälle $hl$ und $k\lambda$ eine wirkliche Schwingungsweise repräsentiren können. Es ist nämlich erforderlich, dass vermittelst derselben $a$ den folgenden zwei Gleichungen:

$$\sin ahl = 0 \quad \text{und} \quad \sin ak\lambda = 0 \tag{139}$$

Genüge geleistet werde; nun entsprechen aber der ersten von ihnen die Wurzeln (138), der zweiten die folgenden:

$$a = \frac{\pi}{k\lambda}\,, \quad \frac{2\pi}{k\lambda}\,, \quad \frac{3\pi}{k\lambda}\,, \ldots \tag{140}$$

und es kommen offenbar dieselben Werthe von $a$ nicht nur dann in beiden Reihen vor, wenn $hl = k\lambda$ ist, wo sich dann die beiden Reihen Glied für Glied entsprechen, sondern auch wenn $k\lambda = \frac{hl}{r}$, oder $hl = \frac{k\lambda}{r}$, oder endlich allgemeiner noch $\frac{k\lambda}{r} = \frac{hl}{s}$ ist, unter $r$ und $s$ beliebige ganze Zahlen verstanden, d. h. mit anderen Worten, wenn aus den Wurzeln (138) die $r^{\text{te}}$ gleich der $s^{\text{ten}}$ in der Reihe (140) ausfällt. Ist nun aber $\frac{k\lambda}{r} = \frac{hl}{s}$, so ist auch $\frac{k\lambda}{nr} = \frac{hl}{ns}$, d. h. auch die $ns^{\text{te}}$ Wurzel aus der (138) ist der $nr^{\text{ten}}$ aus (140) gleich, unter $n$ jede beliebige Zahl verstanden, für welche die Producte $nr$ und $ns$ in ganze Zahlen übergehen. Wenn man daher die unendlich vielen, den beiden Reihen gemeinschaftlichen Werthe von $\alpha$ der Reihe nach aufzählt, so ist die Anzahl derselben zugleich die Anzahl der verschiedenen Schwingungsweisen, deren eine solche Saite fähig ist und die durch die Formeln (136) dargestellt werden können; die übrigen Schwingungsarten aber vermögen nicht gezogen zu werden aus diesen einfachen Formeln, sondern sind aus den allgemeineren (124) abzuleiten. Sind $hl$ und $k\lambda$ incommensurabel, so treten die einfacheren (136) ganz aus der Wirksamkeit und man hat alle Schwingungsweisen aus den allgemeineren (124) abzuleiten. Es kann hier noch hinzugefügt werden, dass die ersteren dieser Formeln den Anfangspunkt der Coordinaten, für welchen $x=0$ ist, zu einem Schwingungsknoten machen, die anderen hingegen sich mit $x=0$ und $\eta=0$ für jedes $t$ in der Regel gar nicht vertragen, woraus folgt, dass der Anfangspunkt der Coordinaten, in welchem die zwei verschiedenen Saitenstücke an einander stossen, zwar gelegentlich Schwingungsknoten sein könne, jedoch nur dann, wenn $hl$ und $k\lambda$ commensurabel sind. Um über die Bedeutung dieser beiden Producte Aufschluss zu gewinnen, bemerke man, dass

$$h=\sqrt{\frac{m}{S}} \quad \text{und} \quad k=\sqrt{\frac{M}{S}}$$

sei. Hiebei sind $m$ und $M$ die Massen der Längeneinheiten der Saite am schwächeren und stärkeren Ende. Nimmt man nun z.B. an, die Saite sei durchwegs cylindrisch, mit den Radien $\rho$ und $R$ an dem schwächeren und stärkeren Ende und den Dichten $\delta$ und $D$, unter Dichte hier die Masse der Volumseinheit des Stoffes, aus welchem die Saite besteht, verstanden, so sind die Querschnitte $\pi\rho^2$ und $\pi R^2$ und desshalb wird $m=\pi\rho^2\delta$, $M=\pi R^2 D$ mithin

$$hl=l\rho\sqrt{\frac{\pi\delta}{S}} \quad , \quad k\lambda=\lambda R\sqrt{\frac{\pi D}{S}}.$$

Hier sind offenbar $l\rho$ und $\lambda R$ die Längenschnitte der beiden verschiedenen Stücke, aus welchen die Saite zusammengefügt ist, dividirt durch 2, und nimmt man nebstdem noch an, dass $\delta=D$ ist, also dass die beiden Saitenstücke aus einerlei Stoff bestehen, so hat man:

$$hl:k\lambda=l\rho:\lambda R.$$

Die Längenschnitte sind es also, die mit einander commensurabel sein müssen, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten die Rolle eines Schwingungsknotens übernehmen soll. Die übrigen Schwingungsknoten, die dann nebst dem Anfangspunkte noch vorhanden sind, findet man ohne Schwierigkeit, indem man für diese beiden Längenschnitte das grösste gemeinschaftliche Mass aufsucht und dann sowohl das stärkere, als auch das schwächere Ende jedes für sich in einander gleiche Theile, deren Längenschnitt gleich diesem gemeinschaftlichen Masse ist, eintheilt. Alle so gewonnenen Theilungspunkte sind dann ebenfalls Schwingungsknoten. Sie sind offenbar äquidistant auf der Seite der negativen $x$ sowohl, wie auch auf jener der positiven. Die Entfernung zweier nächster in der schwächeren Abtheilung der Saite ist aber grösser als in der stärkeren, und es verhalten sich diese Entfernungen umgekehrt wie die Radien $\rho$ und $r$. Mit diesen so gewonnenen Schwingungsknoten besteht aber die langsamste derjenigen Schwingungsweisen, bei welcher der Anfangspunkt unbeweglich bleibt, die rascheren und höher tönenden Schwingungsweisen dieser Art bekömmt man, indem man zwischen je zwei dieser so ermittelten Schwingungsknoten entweder einen oder zwei oder drei, mit einem Worte eine beliebige Anzahl von neuen solchen in gleichen Abständen interpolirt. Jede der beiden Abtheilungen der schwingenden Saite tönt unter solchen Umständen eigentlich für sich, dergestalt jedoch, dass nur solche Schwingungen als zusammen möglich betrachtet werden können, deren eine Abtheilung sowohl, wie auch die andere fähig ist. Es scheint indessen auch ohne allem Beweise klar, dass die Schwingungen, deren zwei oder mehrere Bestandtheilen eines materiellen Systemes je für sich fähig sind, auch im ganzen Systeme bestehen können. Diese sind es also, die die einfacheren Formeln (136) liefern, mit Ausnahme der Amplituden lehren sie uns daher nichts Neues.

Suchen wir uns jetzt auch die Orte zu verschaffen derjenigen Schwingungsknoten, die den tieferen Tönen, welche der Saite, wenn sie nicht theilweise, sondern als Ganzes schwingt, angehören und für welche die unter (135) aufgezeichneten Werthe von $\alpha$ gelten. Wir legen uns zu diesem Zwecke das Formelpaar für $\eta$ in der Gestalt (122) und (123) vor Augen, indem wir die dort vorhandene $r^{\text{te}}$ Wurzel, Namens $\alpha_r$, in ihren für $hl = k\lambda$ bestehenden Werth $\frac{(2r-1)\pi}{2hl}$ umsetzen:

$$(141)\qquad \eta = 2k\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\left\{\left[A_r\cos\frac{(2r-1)\pi t}{2hl} + B_r\sin\frac{(2r-1)\pi t}{2hl}\right]\sin\left[\frac{(2r-1)\pi}{2}\left(\frac{x}{l}+1\right)\right]\right\}.$$

Diese Formel gilt für negative $x$; für positive Werthe dieser Variablen besteht die folgende andere:

$$(142)\qquad \eta = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\left[A_r\cos\frac{(2r-1)\pi t}{2hl} + B_r\sin\frac{(2r-1)\pi t}{2hl}\right]\left[(k-h)\sin\frac{(2r-1)\pi}{2}\left(\frac{kx}{hl}-1\right) - (k+h)\sin\frac{(2r-1)\pi}{2}\left(\frac{kx}{hl}+1\right)\right]$$

oder weil man $k\lambda$ anstatt $hl$ setzen kann, und zugleich:

$$\sin\frac{(2r-1)\pi}{2}\left(\frac{x}{l}+1\right) = (-1)^{r-1}\cos(2r-1)\pi\frac{x}{2l}$$
$$\sin\frac{(2r-1)\pi}{2}\left(\frac{kx}{hl}-1\right) = (-1)^{r}\quad\cos(2r-1)\pi\frac{x}{2\lambda}$$
$$\sin\frac{(2r-1)\pi}{2}\left(\frac{kx}{hl}+1\right) = (-1)^{r-1}\cos(2r-1)\pi\frac{x}{2\lambda}$$

ist, in einfacherer Gestalt:

$$(143)\qquad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \eta = 2k\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\left\{\left[A_r\cos\frac{(2r-1)\pi t}{2hl} + B_r\sin\frac{(2r-1)\pi t}{2hl}\right](-1)^{r-1}\cos\frac{(2r-1)\pi x}{2l}\right\} \\ &\text{für } x>0 \quad \eta = 2k\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\left\{\left[A_r\cos\frac{(2r-1)\pi t}{2hl} + B_r\sin\frac{(2r-1)\pi t}{2hl}\right](-1)^{r}\quad\cos\frac{(2r-1)\pi x}{2\lambda}\right\}. \end{aligned}$$

Ein jeder Bestandtheil dieser beiden Summen ist für sich eine Auflösung des Problemes. Der erste deutet den tiefsten Ton an, den die Saite zu schwingen fähig ist. Ihm entspricht $r=1$, und reducirt man die beiden Summen auf die für $r=1$ gewonnenen Glieder, so hat man:

$$(144)\quad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \eta = \phantom{-}2k\left[A_1 \cos\frac{\pi t}{2hl} + B_1 \sin\frac{\pi t}{2hl}\right]\cos\frac{\pi x}{2l} \\ &\text{für } x>0 \quad \eta = -2k\left[A_1 \cos\frac{\pi t}{2hl} + B_1 \sin\frac{\pi t}{2hl}\right]\cos\frac{\pi x}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Diese Formeln stellen den tiefsten Ton dar, dem die Schwingungsdauer: $\theta = 4hl$ angehört. Die Saite schwingt dabei völlig ohne Schwingungsknoten, da für negative $x$ und zwar von $x=0$ bis $x=l$ der Factor $\cos\frac{\pi x}{2l}$ von der Nulle verschieden bleibt und ebenso für positive $x$ der Factor $\cos\frac{\pi x}{2\lambda}$ von $x=0$ angefangen bis $x=\lambda$ nicht Null wird, und erst für $x=-l$ und $x=\lambda$ selbst die beiden Cosinus verschwinden. Diesen tiefsten Ton schwingt also die Saite als ein Ganzes.

Heben wir jetzt aus den beiden Summen (143) die $r^{\text{ten}}$ Glieder heraus, die ebenfalls eine Auflösung des Problemes enthalten, so dass man auch berechtigt ist:

$$(145)\quad \begin{aligned} &\text{für } x<0 \quad \eta = (-1)^{r-1}\, 2k\left[A_r \cos\frac{(2r-1)\pi t}{2hl} + B_r \sin\frac{(2r-1)\pi t}{2hl}\right]\cos\frac{(2r-1)\pi x}{2l} \\ &\text{für } x>0 \quad \eta = (-1)^{r}\, 2k\left[A_r \cos\frac{(2r-1)\pi t}{2hl} + B_r \sin\frac{(2r-1)\pi t}{2hl}\right]\cos\frac{(2r-1)\pi x}{2\lambda} \end{aligned}$$

anzunehmen. Hier ergeben sich bereits eine gewisse Anzahl von Schwingungsknoten, auf der Seite der positiven sowohl, wie auch der negativen $x$. Man erhält sie durch Auflösung der beiden Gleichungen:

$$(146)\quad \cos\frac{(2r-1)\pi x}{2l} = 0 \quad , \quad \cos\frac{(2r-1)\pi x}{2\lambda} = 0\,.$$

Sie liefern bezüglich die folgenden zwei Systeme von Werthen:

$$(147)\quad \begin{aligned} &x = -\frac{l}{2r-1}, \; -\frac{3l}{2r-1}, \; -\frac{5l}{2r-1}, \; \ldots\ldots, \; -l \\ &x = \phantom{-}\frac{\lambda}{2r-1}, \; \phantom{-}\frac{3\lambda}{2r-1}, \; \phantom{-}\frac{5\lambda}{2r-1}, \; \ldots\ldots, \; \phantom{-}\lambda. \end{aligned}$$

Die dadurch bezeichneten Schwingungsknoten sind, wie man sieht, beiderseits äquidistant und fallen auf der Seite der negativen $x$ in den gemeinsamen Abstand $\frac{2l}{2r-1}$, auf der Seite der positiven $x$ hingegen in den Abstand $\frac{2\lambda}{2r-1}$. Hievon machen nur diejenigen eine Ausnahme, die dem Anfangspunkte der Coordinaten am nächsten stehen. Diese befinden sich nämlich in der gegenseitigen Entfernung $\frac{l+\lambda}{2r-1}$. Die Schwingungsdauer hat hier den Werth: $\theta = \frac{4hl}{2r-1}$, die sich zu der früheren, dem tiefsten Tone entsprechenden verhält wie $1 : 2r-1$. Es sind dies also lauter commensurable, harmonische Töne.

Durch die Voraussetzung, von welcher wir ausgegangen sind, dass nämlich die Saite für $x=-l$ sowohl, als auch für $x=\lambda$ einen festen Punkt habe, ist durchaus nicht gesagt, dass sie sich nur von $x=-l$ bis $x=\lambda$ ausdehne und ausserhalb dieser Grenzen nicht mehr vorhanden sei, sondern es werden lediglich die so bezeichneten zwei Punkte zu Schwingungsknoten gemacht, daher denn auch unsere beiden Formeln (143) von einer solchen beschränkten Ausdehnung der Saite nichts wissen, es gibt vielmehr die erste von ihnen von Null verschiedene $\eta$ auch über $x=-l$ nach der negativen Seite hinaus und ebenso die zweite bestimmte Werthe des $\eta$ über $x=\lambda$ hinaus. Diese Formeln bestehen also, wiewohl sie für $hl=k\lambda$ speciell abgeleitet wurden, auch dann noch ganz ungeändert, wenn man $l$ in $2l$, $3l$, $4l$, ... $sl$ verwandelt und ebenso, wenn man $\lambda$ in $2\lambda$, $3\lambda$, $4\lambda$, ... übergehen lässt, d. h. man kann die Länge eines jeden Bestandtheiles der Saite mit jeder beliebigen ganzen Zahl vervielfachen und wird hiermit eine neue Saite erhalten, welche dieselben durch die Formel (143) gegebenen Töne zu schwingen fähig ist nebst anderen jedoch, deren Repräsentation nicht in diesen Formeln liegt. Es gelten also diese Formeln, so oft $hl$ und $k\lambda$, d. h. die Producte aus den Längenschnitten in die Quadratwurzeln der Dichten commensurabel sind, sie reichen aber nur im Falle $hl=k\lambda$ hin, um alle diejenigen Schwingungsweisen darzustellen. bei welchen der Trennungspunkt $x=0$ der beiden verschiedenen Saitenstücke kein Schwingungsknoten ist, und namentlich geben sie den tiefsten Ton bei einem anderen Verhältnisse von $hl$ zu $k\lambda$ als jenem der Gleichheit nicht. Dieser tiefste Ton also wäre in den verschiedenen Fällen noch aufsuchen, was wir zuvörderst für den Fall thun wollen, wo $hl$ und $k\lambda$ wenig von einander verschieden, aber incommensurabel sind.

Wir fangen damit an, die Beschaffenheit der Wurzeln $\alpha$, die unter dieser Voraussetzung der Transcendenten Genüge leisten, zu erforschen. Zu diesem Zwecke lassen wir das $\alpha$ von einem Werthe Null an allmählich zunehmen. Die beiden Bogen $\alpha hl$ und $\alpha k\lambda$ unter dem Zeichen Cotang behalten hiebei ebenso, wie $hl$ und $k\lambda$ anfänglich einen nur sehr geringen Unterschied, und ihre Cotangenten tragen einerlei Zeichen, bis der grössere dieser Bogen einen Quadranten überschritten hat. Seine Cotangente wird dann negativ und wächst nach dieser negativen Seite von Null angefangen, dagegen die Cotangente des kleineren Bogens annoch positiv ist und im fortwährenden Abnehmen gegen Null zu begriffen. Hier gibt es also nothwendig einen Werth $\alpha$, der das Polynom unserer transcendenten Gleichung:

$$k \operatorname{cotang} \alpha k\lambda + h \operatorname{cotang} \alpha hl = 0$$

verschwinden macht und es bietet sich also eine erste Wurzel, die in einer der beiden Gestalten: $\alpha_1 hl = \frac{\pi}{2} - \sigma_1$ oder $\alpha_1 k\lambda = \frac{\pi}{2} + \tau_1$ erscheinen kann, unter $\sigma_1$ und $\tau_1$ sehr kleine, zugleich positive oder zugleich negative Bogen verstanden. Nachdem bei dem ferneren Wachsen von $\alpha$ beide Bogen einen Quadranten überschritten haben, wird der grössere von ihnen allmählich zum Betrage von zwei Quadranten heranwachsen und seine Cotangente wird alldort plötzlich von $-\infty$ zu $+\infty$ überspringen, dann aber vom Werth $+\infty$ gegen Null zu fortwährend abnehmen. Gleichzeitig nähert sich aber die Cotangente des kleineren Bogens dem Werthe $-\infty$. Hier gibt es also nothwendigerweise wieder ein $\alpha$, welches das Gleichungspolynom auf Null bringt, also eine zweite Wurzel, die man in einer der beiden Gestalten $\alpha_2 hl = \pi - \sigma_2$ oder $\alpha_2 k\lambda = \pi + \tau_2$ voraussetzen kann, unter $\sigma_2$ und $\tau_2$ abermals ganz kleine, aber dasselbe Zeichen tragende Bogen verstanden. Lassen wir nun $\alpha$ ferner wachsen, so finden wir auf dieselbe Weise in der Nähe von drei Quadranten wieder eine Wurzel $\alpha_3$, in der Nähe von vier Qradranten eine andere Wurzel $\alpha_4$ u. s. w. allgemein in der Nähe des $r^{\text{ten}}$ Quadranten eine $r^{\text{te}}$ Wurzel $\alpha_r$ in der Gestalt:

$$(148) \qquad \alpha_r hl = \frac{r\pi}{2} - \sigma_r \quad \text{oder} \quad \alpha_r k\lambda = \frac{r\pi}{2} + \tau_r.$$

Es versteht sich von selbst, dass die Bogen: $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, ... $\sigma_r$ und $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, .... $\tau_r$ stets grösser und grösser werden müssen, je grösser der Stellenzeiger ist, den sie tragen, und dass man nur die ersten von ihnen in bestimmter Anzahl als sehr kleine Grössen zu behandeln das Recht habe. Angenommen nun, $\sigma_r$ und $\tau_r$ wären noch in diesem Falle sehr klein, so geben die vorliegenden Werthe von $\alpha_r hl$ und $\alpha_r k\lambda$ in die transcendente Gleichung eingeführt, entweder:

$$k \tan \tau_r - h \tan \sigma_r = 0 \quad . \quad \text{oder } k \tan \sigma_r - h \tan \tau_r = 0,$$

je nachdem $r$ ungerade ist, oder gerade. Ersetzt man nun $tang\ \sigma_r$ und $tang\ \tau_r$ durch die ihnen gleichgeltenden Reihen, hingezeichnet in nur ein paar Anfangsgliedern, so ergibt sich entweder:

$$k\tau_r + \frac{k\tau_r^3}{3} = h\sigma_r + \frac{h\sigma_r^3}{3}$$

oder

$$h\tau_r + \frac{h\tau_r^3}{3} = k\sigma_r + \frac{k\sigma_r^3}{3}$$

oder in erster Annäherung, indem man die dritten Potenzen der sehr kleinen Bogen $\tau_r$ und $\sigma_r$ einstweilen ausser Acht lässt:

$$k\tau_r = h\sigma_r \qquad \text{oder} \qquad h\tau_r = k\sigma_r.$$

Hiemit gibt die Substitution für $\tau_r$ in die beide Gleichungen (148) gemacht und Gleichstellung der beiden aus ihnen hervorgehenden Werthe für $\alpha_r$ entweder:

(149) $$\alpha_r = \frac{r\pi}{2} \frac{h+k}{h^2 l + k^2 \lambda}, \quad \text{oder } \alpha_r = \frac{r\pi}{2} \frac{h+k}{hk(l+\lambda)}.$$

Die erste Formel gilt nämlich für ungerade, die zweite für gerade $r$. Man erhält mithin die folgende Reihe von Wurzeln $\alpha$:

(150) $$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \frac{h+k}{h^2 l + k^2 \lambda}, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} \frac{h+k}{h^2 l + k^2 \lambda}, \quad \alpha_5 = \frac{5\pi}{2} \frac{h+k}{h^2 l + k^2 \lambda} \ldots\ldots$$

(151) $$\alpha_2 = \pi \frac{h+k}{hk(l+\lambda)}, \quad \alpha_4 = 2\pi \frac{h+k}{hk(l+\lambda)}, \quad \alpha_6 = 3\pi \frac{h+k}{hk(l+\lambda)} \ldots\ldots$$

Sie entsprechen zwei verschiedenen Reihen von Tönen, von welchen die ersten unter sich, die zweiten wieder unter sich consoniren, aber jeder Ton der ersten Reihe dissonirt mit allen Tönen der anderen, so dass man sagen kann, dass mit dem tiefsten oder Grundtone der Saite verglichen alle Octaven, die sämmtlich zur zweiten Reihe gehörig sind, falsch erscheinen. Aber auch die Consonanz der Töne jeder Reihe unter sich ist nur approximativ richtig, wovon man sich überzeugt, die dritten Potenzen von $\sigma_r$ und $\tau_r$ dadurch in Rechnung ziehend, dass man $\sigma_r^3$ und $\tau_r^3$ durch ihre aus der ersten Approximation gezogenen Werthe ersetzt und dann eine neue Bestimmung von $\alpha_r$ vornimmt. Das Ergebniss ist entweder:

(152) $$\alpha_r = \frac{r\pi}{2} \frac{h+k}{h^2 l + k^2 \lambda} + \frac{r^3 \pi^3 hk(k-h)\delta^3}{3(h^2 l + k^2 \lambda)(k+h)^2 \omega^3}$$

oder:

$$\alpha_r = \frac{r\pi}{2}\,\frac{k+h}{hk(l+\lambda)} + \frac{r^3\pi^3(h-k)\,\delta^3}{3(l+\lambda)(k+h)^2\omega^3} \tag{153}$$

ersteres für ungerade, letzteres aber für gerade Werthe von $r$. Man erschliesst aus diesen Formeln zwei Reihen von dissonirenden Tönen: der Octave nahe liegende kommen nur in der zweiten Reihe vor und die Dissonanzen sind merklicher zwischen den Tönen verschiedener Reihen, als zwischen denjenigen, welche zu einer und derselben Reihe gehörig sind. Der ersten von ihnen entsprechen ungerade $r$, der zweiten aber gerade dieser ganzen positiven Zahl. Sie sind:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{h+k}{h^2 l + k^2\lambda} + \frac{\pi^3}{3}\,\frac{hk(k-h)\,\delta^3}{(h^2 l + k^2\lambda)(k+h)^2\omega^3}\;,\quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2}\,\frac{h+k}{h^2 l + k^2\lambda} + \pi^3\,\frac{3hk(k-h)\,\delta^3}{(h^2 l + k^2\lambda)(k+h)^2\omega^3}\;\ldots \tag{154}$$

$$\alpha_2 = \pi\,\frac{h+k}{hk(l+\lambda)} + \frac{8\pi^3(h-k)\,\delta^3}{3(l+\lambda)(k+h)^2\omega^3}\;,\quad \alpha_4 = 2\pi\,\frac{k+h}{hk(l+\lambda)} + \frac{64\pi^3(h-k)\,\delta^3}{3(l+\lambda)(k+h)^2\omega^3}\;\ldots \tag{155}$$

In allen diesen Formeln bedeutet $\omega$ die halbe Summe, $\delta$ aber die halbe Differenz der zwei Producte $k\lambda$ und $hl$, so zwar, dass:

$$\omega = \frac{hl + k\lambda}{2}\;,\quad \delta = \frac{k\lambda - hl}{2}$$

ist. Jedes der zur ersten Reihe gehörigen $\alpha$ steht zu dem entsprechenden $\alpha$ der zweiten Reihe keineswegs in dem Verhältnisse 1 : 2, so wie dies sein müsste, wenn die schwingende Saite reine Octaven tönen könnte, sondern in einem merklich genug davon abweichenden, z. B. wenn man $k = 2h$ hat und zugleich $\delta = \frac{\omega}{10}$, so ergibt sich $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{62}{29}$ mithin ist der zweite Ton, den eine solche Saite zu schwingen vermag, von der Octave des ersten und tiefsten Grundtones verschieden und zwar um mehr als $\frac{1}{4}$ Ton und etwas weniger als $\frac{1}{2}$ Ton. Die Octaven sind also sehr falsch, während Terz und Quint ziemlich rein klingen, nachdem der zweite Theil des Werthes eines jeden $\alpha$ jederzeit einen sehr mässigen Werth hat, wie man sich sehr leicht und am allerbesten in einigen numerischen Beispielen überzeugen kann.

Frägt man jetzt nach der Stellung der Schwingungsknoten, die einer Wurzel $\alpha$ entsprechen, so erhält man offenbar die auf die Seite der negativen $x$ fallenden und zwar allgemein für $\alpha = \alpha_r$, wenn man die negativen Wurzeln der Gleichung:

$$\sin\left[\alpha_r h\,(x + l)\right] = 0 \tag{156}$$

von der numerisch kleinsten angefangen alle aufsucht. Diese ihrem Zahlenwerthe nach kleinste Wurzel sei $-x_1$, so wird man die zweite, die dritte und die übrigen Wurzeln alle dadurch bekommen, dass man zu $x_1$ lauter solche Zusätze macht, in Folge deren der Bogen unter dem Zeichen Sinus um eine halbe Peripherie zunimmt. Ein solcher Zusatz ist aber offenbar: $-\frac{\pi}{\alpha_r h}$. Wenn man denselben beliebig oft, z. B. $s$ Mal hinzufügt, so erhält man die Orte aller Schwingungsknoten:

$$-x_2 = -x_1 - \frac{\pi}{\alpha_r h}\;,\quad -x_3 = -x_1 - \frac{2\pi}{\alpha_r h}\;\ldots \tag{157}$$

Diese Schwingungsknoten sind daher äquidistant und fallen vom ersten derselben angefangen in den gemeinsamen Abstand $\frac{\pi}{a_r h}$. Es handelt sich daher nur um die Abscissenaxe des ersten von ihnen. Hat man diese gefunden, so trägt man von ihrem Endpunkte aus die gemeinsame Entfernung $\frac{\pi}{a_r h}$ beliebig oft auf und es ist gestattet, dies selbst über die Entfernung $x = -l$ hinaus zu thun. Man erhält nämlich immer, so oft man dies auch thun mag, Seitenlängen, die den Ton, dem die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{a_r}$ entspricht, geben können. Nur die anderen Töne, denen die übrigen Wurzeln $\alpha$ angehörig sind, bekömmt man dann in der Regel nicht, mit Ausnahme derjenigen, die etwa zu diesem $r^{ten}$ Tone in einem commensurablen Schwingungsverhältnisse stehen.

Auch auf der Seite der positiven Coordinaten $x$ ergeben sich äquidistante Schwingungsknoten. Ihre Orte gehen aus der Auflösung der Gleichung:

$$(158) \qquad (k-h)\, sin\,[\alpha_r(kx-hl)] - (k+h)\, sin\,[\alpha_r(kx+hl)] = 0$$

hervor und es ist abermals klar, dass, wenn man den kleinsten Werth $x = x_1$ besässe, der diese Gleichung erfüllt, man sich daraus unmittelbar die folgenden grösseren durch Hinzufügen einer halben Peripherie zu jedem der beiden unter dem Zeichen Sinus erscheinenden Bogen, mehrere Male wiederholt, verschaffen kann. Dadurch nämlich bleiben diese beiden Sinus entweder ganz und gar dieselben, oder ändern beide auf Einmal ihre Zeichen. War mithin der erste Theil der Gleichung Null, so bleibt er auch Null. Man erzweckt dies durch wiederholtes Hinzufügen von $\frac{\pi}{a_r k}$ zu $x$ und erhält so die folgenden Orte der Schwingungsknoten:

$$(159) \qquad x_1\,,\; x_2 = x_1 + \frac{\pi}{a_r k}\,,\; x_3 = x_1 + \frac{2\pi}{a_r k}\,, \ldots\ldots$$

Sie sind abermals äquidistant und fallen in den gemeinsamen Abstand vom ersten derselben angefangen. Bedenkt man nun, dass der ursprünglichen Anlage der Rechnung nach die Punkte $x = \lambda$ und $x = -l$ fest, mithin Schwingungsknoten sind, so wird man sich leicht alle übrigen mit Einschluss des ersten auf der positiven Seite und auch des ersten auf der negativen Seite dadurch verschaffen können, dass man vom Punkte $x = \lambda$ an nach rückwärts eine Strecke gleich $\frac{\pi}{a_r k}$ so oft aufträgt, als man kann, ohne den Anfangspunkt der Coordinaten zu überschreiten und eben so erhält man die Schwingungsknoten auf der andern Seite, indem man vom Punkte $-l$ an eine Strecke gleich $\frac{\pi}{a_r h}$ nach vorwärts so oft aufträgt, als man kann, ohne über den Anfangspunkt der Coordinaten hinaus zu gelangen.

Dem Falle, wo die zwei Producte $hl$ und $k\lambda$ sehr wenig von einander verschieden sind, steht ein anderer extremer Fall entgegen, wo das eine gegen das andere sehr klein vorausgesetzt werden kann. Sucht man, um auch in diesem extremen Falle Aufschluss zu gewinnen über die Töne, die eine solche Saite, aus zwei Bestandtheilen von verschiedenen Massen zusammengesetzt, schwingen kann, die Grenzen auf, zwischen welchen die transcendente Gleichung (121) unter solchen Umständen Wurzeln besitzen kann, so hat man zu diesem Zwecke folgende Betrachtungen anzustellen: Wenn dem $\alpha$ in der (121) von Null angefangen alle möglichen Werthe ertheilt werden, so erhalten anfänglich beide Glieder, die sich im ersten Theile dieser Gleichung befinden, einerlei Zeichen, können mithin aggregirt, nicht Null geben. Erst wenn $\alpha$ so gross geworden ist, dass der grössere der beiden Bogen $\alpha h l$ und $\alpha k \lambda$ einen Quadranten überschreitet, bekommen diese beiden Glieder entgegengesetzte Zeichen und das gegenseitige Aufheben derselben wird möglich, kann aber wegen der vorausgesetzten Ungleichheit dieser beider Bogen erst dann stattfinden, wenn der grössere von ihnen bereits einer halben Peripherie nahe gekommen ist, wo dann die Cotangente des kleineren sehr gross und positiv, die des grösseren hingegen ebenfalls sehr gross und negativ ausfällt. Es vermag daher die erste der Wurzeln $\alpha$, die auch hier mit $\alpha_1$ bezeichnet werden soll, in einer der zwei folgenden Formen zu erscheinen:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{hl} = \frac{\pi - \tau_1}{k\lambda} \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{k\lambda} = \frac{\pi - \tau_1}{hl}$$

je nachdem entweder der Bogen $hl$, oder der andere $k\lambda$ der kleinere von beiden ist. Hier bezeichnen $\sigma_1$ und $\tau_1$ sehr kleine und positive Bogen, deren Werthe erst zu ermitteln sind.

Bei der ferneren Zunahme von $\alpha$ wächst nun der grössere der zwei Bogen $\alpha h l$ und $\alpha k \lambda$ über $\pi$ hinaus, während der kleinere noch von Null wenig verschieden ist. Die Cotangenten gewinnen daher wieder dieselben Zeichen, bis der grössere drei Quadranten überschritten hat und vieren nahe kömmt. Wenn daher die Ungleichheit der beiden Producte $hl$ und $k\lambda$ sehr gross ist, so lässt sich die zweite Wurzel $\alpha_2$ ebenfalls in einer der beiden folgenden Gestalten wieder geben:

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_2}{hl} = \frac{2\pi - \tau_2}{k\lambda} \quad \text{oder} \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{k\lambda} = \frac{2\pi - \tau_2}{hl}$$

und ganz allgemein unter Voraussetzung sehr ungleicher $hl$ und $k\lambda$ erscheint die $r^{\text{te}}$ Wurzel $\alpha_r$ in einer der beiden Formen:

$$\alpha_r = \frac{\sigma_r}{hl} = \frac{r\pi - \tau_r}{k\lambda} \quad \text{oder} \quad \alpha_r = \frac{\sigma_r}{k\lambda} = \frac{r\pi - \tau_r}{hl}$$

je nachdem $hl$ oder $k\lambda$ das kleinere dieser beiden Producte ist. Führen wir nun diese Werthe für $\alpha_r$ in die transcendente Gleichung in $\alpha$ ein, so ergibt sich entweder:

$$(160) \qquad \alpha = \frac{r\pi}{k(l+\lambda)} + \frac{r^3\pi^3(k^2-h^2)l^3}{3k^3(l+\lambda)^4} + \ldots \quad \text{oder}$$

$$(161) \qquad \alpha = \frac{r\pi}{h(l+\lambda)} + \frac{r^3\pi^3(h^2-k^2)\lambda^3}{3h^3(l+\lambda)^4} + \ldots$$

Die erste Formel gilt, wenn das stärkere Stück der Saite das an Masse weit überwiegende ist, die zweite aber, wenn das schwächere Stück die bei weitem grössere Ausdehnung hat. Da beide gleichmässig für gerade, wie auch für ungerade $r$ gelten, so besteht hier der Unterschied in der Reinheit der Töne nicht mehr, wie in dem anderen extremen Falle, wo $hl$ und $k\lambda$ einander nahezu gleich vorausgesetzt wurden. Die Octaven sind hier nicht mehr vorzugsweise falsch, es sind es im gleichen Masse die Terzen, Quinten u. s. w. auch. Zu den Schwingungsknoten gelangt man auch hier genau auf dieselbe Weise, indem man nämlich von dem schwächeren Ende angefangen, Stücke gleich $\frac{\pi}{\alpha_r h}$ so oft aufträgt, als man kann, ohne den Anfangspunkt der Coordinaten zu überspannen; imgleichen von dem stärkeren Ende der

Saite an, Stücke gleich $\frac{\pi}{\alpha_r k}$ so oft absticht, als man kann, ohne den Anfangspunkt zu überschreiten. Der Unterschied ist hier nur der, dass die Anzahl der so erhaltenen Schwingungsknoten, die auf der positiven und negativen Seite vorhanden sind, und die in dem früheren Falle beiderseits beinahe eine gleiche war, hier eine sehr ungleiche wird, so zwar, dass das eine der beiden Fadenstücke sogar keinen Schwingungsknoten enthalten kann, während das andere deren eine beträchliche Menge zählt.

Wir sind bisher von der Voraussetzung incommensurabler $hl$ und $k\lambda$ ausgegangen, unter welcher die Auflösung der transcendenten Gleichung die meisten Schwierigkeiten bietet. Würden sich hingegen die Bogen $hl\alpha$ und $k\lambda\alpha$ wie zwei ganze Zahlen $p$ und $q$ zu einander verhalten, so dass man z. B. hätte $hl\alpha = pu$ und $k\lambda\alpha = qu$, so erleichtert dies die Auffindung der Wurzeln $\alpha$, die die Transcendente (121), welche jetzt in die folgende:

$$h \, cotang \, pu + k cotang \, qu = 0 \tag{162}$$

übergeht, sehr wesentlich. Es kann nämlich diese Transcendente jetzt dadurch, dass man $tang \, u = z$ als neue Unbekannte einführt, in eine algebraische verwandelt und dann als solche weiter behandelt werden. In der That hat man nach den bekannten Formeln für die trigonometrischen Functionen der vielfachen Bogen:

$$cotang \, pu = \frac{1 - \binom{p}{2} z^2 + \binom{p}{4} z^4 - \ldots.}{\binom{p}{1} z - \binom{p}{3} z^3 + \binom{p}{5} z^5 - \ldots}$$

$$cotang \, qu = \frac{1 - \binom{q}{2} z^2 + \binom{q}{4} z^4 - \ldots.}{\binom{q}{1} z - \binom{q}{3} z^3 + \binom{q}{5} z^5 - \ldots}$$

Zähler und Nenner dieser Werthe sind, vermöge der zu Grunde gelegten Voraussetzung, dass $p$ und $q$ ganze Zahlen seien, von selbst abbrechende Reihen; die vorliegende transcendente Gleichung aber geht mit denselben nach gehöriger Wegschaffung der Brüche über in:

$$\begin{aligned} 0 = {} & z\,(hq + kp) - z^3\left[h\binom{q}{3} + k\binom{q}{2}\binom{p}{1} + h\binom{q}{1}\binom{p}{2} + k\binom{p}{3}\right] + \\ & + z^5\left[h\binom{q}{5} + k\binom{q}{4}\binom{p}{1} + h\binom{q}{3}\binom{p}{2} + k\binom{q}{2}\binom{p}{3} + h\binom{q}{1}\binom{p}{4} + k\binom{p}{5}\right] - \\ & - z^7\left[h\binom{q}{7} + k\binom{q}{6}\binom{p}{1} + h\binom{q}{5}\binom{p}{2} + k\binom{q}{4}\binom{p}{3} + h\binom{q}{3}\binom{p}{4} + k\binom{q}{2}\binom{p}{5} + h\binom{q}{1}\binom{p}{6} + h\binom{p}{7}\right] - \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{163}$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist immer

$$z = tang \, u = 0 \tag{164}$$

das ist aber gerade die bereits früher besprochene, die keine Schwingungen gibt des aus heterogenen Theilen zusammengesetzten Systemes als solchen, sondern nur diejenigen Schwingungen, die die einzelnen Theile je für sich und gleichzeitig mit einem Schwingungsknoten im Trennungspunkte anzunehmen vermögen. Man überzeugt sich hievon sehr leicht durch den unmittelbaren Anblick der Formel (122) und (123) für $\eta$, die dann beide $\eta = 0$ geben, wenn $x = 0$ angenommen wird, indem in der ersten der Factor $sin \, \alpha hl = sin \, pu$, in der anderen aber der Factor $(-k+h) \, sin \, pu - (k+h) \, sin \, pu = -2k \, sin \, pu$ erscheint, wenn $x = 0$ gesetzt wird, ein Factor der für dieselben Werthe gleich Null wird, für welche auch

$z = \tang u$ verschwindet. Lassen wir nun diese eine Wurzel ausser Acht, so geht unsere letzt gewonnene Gleichung in $z$, so lange $p$ und $q$ als mässige Zahlen gedacht werden, über in beinahe durchwegs sehr einfache Gestalten. So z. B. hat man $p = 1$, $q = 2$:

$$0 = 2h + k - z^2 k$$

daher

$$z = \pm \sqrt{2\frac{h}{k} + 1}.$$

Ebenso erhält man in dem Falle: $p = 1$, $q = 3$

$$0 = 3h + k - z^2[h + 3k]$$

also:

$$z = \pm \sqrt{\frac{3h + k}{h + 3k}}$$

für $p = 2$, $q = 3$ ergäbe sich in derselben Weise:

$$0 = 3h + 2k - z^2[4h + 6k] + z^4 h$$

daher:

$$z = \pm \sqrt{\frac{2h + 3k}{h} \pm \frac{1}{h}\sqrt{h^2 + 10hk + 9k^2}}$$

u. s. w. Der kleinste von allen so gewonnenen Werthen von $z$, der auch das kleinste $\alpha$ gibt, ist hier immer der wichtigste von allen, weil ihm der tiefste oder Grundton angehört. Auch hat es keine Schwierigkeit von dem Falle commensurabler $hl$ und $k\lambda$, die im Verhältnisse der ganzen Zahlen $p$ und $q$ zu einander stehen zu denjenigen incommensurabler $hl$ und $k\lambda$ den Weg zu finden, die nur nahezu dieses Verhältniss einhalten und diesem entsprechend die sehr kleinen Correctionen, die zunächst zu $z$, dann aber auch zu $\alpha$ hinzugefügt werden müssen, zu ermitteln.

Wiewohl die Theorie gespannter Saiten die älteste derjenigen ist, die ihre Repräsentation in einer partiellen Differentialgleichung finden, und in die Zeiten d'Alembert's und Euler's zurückreicht, so ist dieselbe keineswegs als abgeschlossen anzusehen, wie unter anderen auch die in dieser Abhandlung gewonnenen Ergebnisse beweisen dürften, und wenn auch die Analysis bei einem so allgemein bekannten und so vielfach im Leben geübten Gegenstande, wie Schwingungen von Saiten, vermuthlich des Neuen nur sehr wenig bringen kann, oder vielleicht gar nichts, was nicht schon von den Musikern früher beobachtet worden wäre, so muss es doch schon für verdienstlich gehalten werden, wenn bereits beobachtete Erscheinungen, die aber in der gewöhnlichen Sprache der Kunst mit einem theils unrichtigen, theils nichtssagenden Ausdrucke bezeichnet werden, die passende mathematische Ausdrucksweise finden, die ihr Wesen und ihren Ursprung charakterisirt. Es wäre daher vielleicht verdienstlich, wenn man das nur in erster Annäherung und für einen hypothetischen, nirgends in der Natur wahrnehmbaren Fall erledigte Schwingungsproblem gespannter Saiten mit den neuen Hilfsmitteln der Analysis wieder aufnähme, die Störungen in Rechnung ziehend, die von den mannigfaltigsten Nebenumständen herrühren, welche nie fehlen und auch nach dem Zeugnisse des musikalischen Ohres nie ohne Wirkung bleiben und die dennoch diese erste Annäherung unbeachtet gelassen hat. Aber nicht nur das Schwingungsproblem gespannter Saiten, sondern auch die anderen weit complicirteren Probleme dieser Art, wie die Wellenbewegung tropfbarer und ausdehnbarer Flüssigkeiten wären gewiss ein würdiger Gegenstand neuer mathematischer sowohl, wie auch experimenteller Studien, und ein Werk, wie die Wellenlehre der Gebrüder Weber in zeitgemässer Vervollständigung unternommen von hiezu ebenso vorzüglich geeigneten wissenschaftlichen Kräften, eine Arbeit, die gewiss der Mühe eines Decenniums würdig wäre.